# РАЗБОР ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ОТКРЫТОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТУРНИРА

## 21-24 ноября 2017 г.

| 1. КВИДДИЧ | КЛАСС |
|---|---|
| | 5 6 |

На соревнованиях по квиддичу в Хогвартсе участвовало несколько команд из разных школ, встречающихся друг с другом по круговой системе. Каждый матч игрался до тех пор, пока одна и команд не забивала 3 мяча. При этом, если выигравшая команда пропускала не более 1 мяча, ей присуждалось 3 очка, иначе - 2 очка победителю и 1 - проигравшему. Победитель турнира Гриффиндор, набравший больше всех очков, выиграл меньше встреч, чем Слизерин, который набрал самое маленькое количество очков. Какое наименьшее количество команд участвовало в турнире?

**Решение**

**Оценка.** Если команд не больше трёх, то Слизерин выиграет все встречи, значит, и очков у него больше всех. Противоречие.

Если команд четыре или пять, то каждая из них проведёт три или четыре матча. Поэтому Гриффиндор выиграет не более одной встречи и наберет максимум $5 = 3 + 1 + 1$ или $6 = 3 + 1 + 1 + 1$ очков соответственно. Слизерин в этом случае выиграет не менее двух встреч при четырёх участниках и не менее трёх встреч при пяти участниках, то есть наберет минимум $4 = 2 + 2 + 0$ или $6 = 2 + 2 + 2 + 0$ очков соответственно. Учитывая, что Гриффиндор должен набрать хотя бы на 2 очка больше, чем Слизерин, получим противоречие.

Следовательно, команд не меньше шести.

**Пример.**

| Команды | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Очки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Гриффиндор | X | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 |
| A | 2 | X | 2 | 2 | 1 | 1 | 8 |
| B | 2 | 1 | X | 2 | 2 | 1 | 8 |
| C | 2 | 1 | 1 | X | 2 | 1 | 7 |
| D | 0 | 2 | 1 | 1 | X | 3 | 7 |
| Слизерин | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | X | 6 |

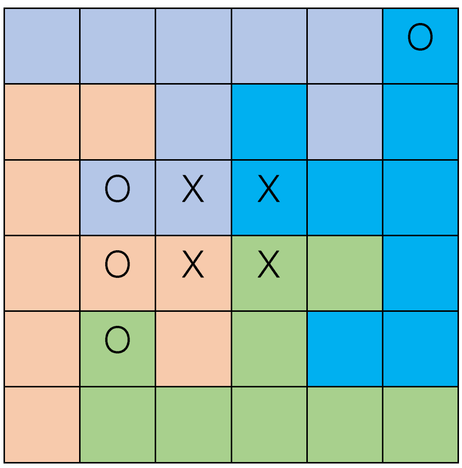
**Ответ.** При шести командах.

| 2. ТИРАН И МУДРЕЦЫ | КЛАСС |
|---|---|
| | 5 6 |

Однажды злой тиран заключил в темницу четверых мудрецов, выпускающих памфлеты с разоблачениями его придворных, и обещал всех казнить на следующее утро, если они не разрежут данный квадрат по сторонам клеток на 4 одинаковые по форме части таким образом, чтобы каждая часть содержала по одному крестику и по одному нолику. Помогите мудрецам избежать казни.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | O |
| | | | | | |
| | O | X | X | | |
| | O | X | X | | |
| | O | | | | |
| | | | | | |

**Решение**



| 3. ЦВЕТЫ | КЛАСС |
|---|---|
| | 5 6 |

Даша и Аркаша решили посадить в палисаднике цветы. Даша очень любит тюльпаны, а Аркаша – пионы. Но саженцев пионов у Аркаши всего 4, к тому же, он не хочет, чтобы Даша, у которой целый мешок тюльпанов, засадила ими все вокруг так, что его пионов не будет видно, и хитрый Аркаша придумал условие.

- Даша, ты можешь сажать свои тюльпаны столько, сколько захочешь, но при условии, что на расстоянии 20 см от каждого твоего тюльпана должны расти два моих пиона.

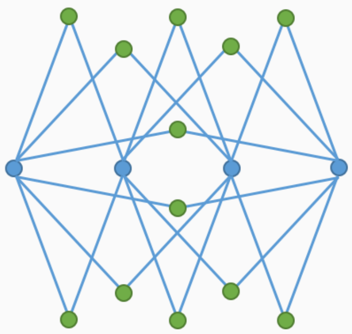
Даша, немного думая, согласилась, но при условии, что сама выберет, где сажать как пионы, так и тюльпаны.

Довольный Аркаша подумал, что Даша больше двух тюльпанов и не сможет посадить, но был очень огорчен итогами всего мероприятия.

Какое наибольшее количество тюльпанов сможет посадить Даша? Покажите на рисунке.

**Решение**

Возможны различные варианты расположения пионов и тюльпанов. Наибольшее число тюльпанов можно расположить, если пионы растут достаточно близко друг к другу. Для каждой пары пионов можно поставить в соответствие не более двух тюльпанов. Таким образом, тюльпанов можно посадить не более, чем в два раза больше всевозможного количества различных пар из 4х пионов – таковых пар найдется 6. Т.о., тюльпанов будет не более 12. Пример 12:



| 4. ШАХМАТНЫЙ ТУРНИР | КЛАСС |
| --- | --- |
| | 5 6 |

В шахматном турнире за победу дается 1 очко, за ничью - 0.5, за поражение - 0. Участники сыграли друг с другом по круговой системе по одному разу, при этом оказалось, что среди любых трех игроков обязательно есть заработавший в матчах с двумя другими ровно 1.5 очка. Какое при данных условиях наибольшее количество участников могло быть на турнире?

**Ответ:** 5.

**Решение**

Пример. Обозначим участников буквами A, B, C, D, E. Пусть A выиграл у B, B - у C, C – у D, D – у E, E – у A, а другие партии закончились вничью. Условие задачи выполнено.

Оценка. Из условия следует, что для этого турнира должны выполняться два утверждения:

1) нет трёх игроков, все партии между которыми закончились вничью;

2) нет игроков, в партиях между которыми не было ничейных результатов.

Пусть в турнире участвовало шесть или более игроков. Оставим только их и изобразим полный граф с шестью вершинами, соответствующими игрокам, где красные ребра обозначают результативные партии, а желтые – ничейные. В нём всегда найдется три вершины, все рёбра между которыми одного цвета, что противоречит только что сформулированным утверждениям.

| 5. МОНЕТЫ | КЛАСС |
|---|---|
| | 5 6 7 |

Аркаша - нумизмат, и в его коллекции монеты из 10 различных стран. Если не глядя взять 10 монет, то среди них обязательно найдутся монеты из 5 разных стран. Какое наибольшее количество монет в коллекции у Аркаши?

**Решение.**

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{10}$, где $a_i$ - кол-во монет i-й страны.

Заметим, что $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 < 10.$

В противном случае можно взять 10 монет из 4х стран.

Причем: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 4a_4$

$$4a_4 \leq 9, a_4 \leq 2.$$

Отсюда: $a\_5, \ldots, a_{10} \leq a_4 \leq 2, \text{т. е.} \, a_5 + \ldots + a_{10} \leq 12.$

Но $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 9$, поэтому $a_1 + \ldots + a_{10} \leq 12 + 9 = 21.$

Пример для 21: 3,2,2,...,2.

| 6. МНОГОУГОЛЬНИК | КЛАСС |
|---|---|
| | 7 8 |

Аркаша разрезал выпуклый 15-угольник по диагоналям, получив несколько многоугольников. Даше Аркаша решил подарить столько конфет на день рождения, сколько вершин у одного из получившихся многоугольников. Какое максимальное количество конфет Аркаша может подарить Даше и в каком случае? (Организаторы Турнира предупреждают, что чрезмерное злоупотребление конфетами вредно!)

**Ответ:** 15.

Из каждой вершины исходного 15-угольника выходит не более двух диагоналей, которые являются сторонами рассматриваемого многоугольника. Каждой диагонали соответствуют две вершины, поэтому число сторон рассматриваемого многоугольника не превосходит 15. Пример правильного 15-угольника показывает, что число сторон полученного при разрезании многоугольника может быть равно 15.

| 7. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА | КЛАСС |
| --- | --- |
| | 7 8 |

С помощью циркуля и линейки постройте прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, если $\frac{AC}{BC} = a, CH = h$ - перпендикуляр к AB.

**Решение**

Пусть a и h — данные отрезки. Предположим, что нужный треугольник ABC построен, AC и BC его катеты, CH — высота, опущенная на гипотенузу, причём $\frac{BC}{AC} = \ a = \frac{ax}{x}$ и $CH \ = \ h.$

Отложим на лучах CA и CB отрезки CA' и BA' равные m и n соответственно. Тогда треугольник ABC подобен треугольнику ABC по двум сторонам и углу между ними.

Отсюда вытекает следующее построение. Строим прямоугольный треугольник A'B'C по катетам A'C = ax и B'C = x. Проводим его высоту CH', на луче CH' откладываем отрезок CH = h и через точку H проводим прямую, параллельную A'B'. Эта прямая пересекает лучи CA' и CB' в искомых вершинах A и B.

| 8. ЛИНЕЙКА 1 СЕНТЯБРЯ | КЛАСС |
| --- | --- |
| | 7 8 9 |

На линейке 1 сентября в некоторой школе 20 учеников подошли к 20 учителям и подарили им букеты цветов (каждый ученик не дарил одному и тому же учителю более 1 букета). При этом после линейки они разбились на пары «учитель-ученик», причем в каждой паре ученик оказался вместе с учителем, которому дарил букет, и такое разбиение оказалось единственно возможным. Какое наибольшее количество букетов могло быть подарено учениками?

**Ответ:** 210.

**Решение**

Обозначим учеников $S_1, \dots, S_{20}$, а учителей – $T_1, \dots, T_{20}$ так, чтобы

$$S_1 - T_1,\ S_2 - T_2, \dots,\ S_{20} - T_{20}$$

было единственно возможным разбиением на пары из условия задачи. Предположим, что каждый ученик подарил цветы хотя бы двум учителям. Нарисуем стрелку от каждого учителя $T_i$ к ученику $S_i$, от которого он получил букет, а от каждого ученика $S_i$ – к другому (отличному от $T_i$)

учителю, которому он дарил цветы. Тогда от каждого ученика или учителя ведёт по стрелке. Если мы будем двигаться по стрелкам (начав от произвольной девочки), то рано или поздно мы попадём к учителю, который уже встречался в цепочке. Таким образом, в соответствующем графе есть цикл. Объединим в этом цикле каждого ученика с учителем, к которому от него ведет стрелка; остальные пары оставим без изменения. Мы получили другое разбиение на пары, что противоречит условию.

Следовательно, найдётся ученик, который дарил цветы *ровно* одному учителю. Если отбросить эту пару, число подаренных букетов уменьшится не больше, чем на 20 – максимальное возможное количество подаренных букетов этому учителю. После этого снова найдется ученик, подаривший ровно один букет одному из оставшихся учителей. Отбросив эту пару, уменьшим количество звонков не более, чем на 19, и т. д. Итого, было подарено не более

$$20 + 19 + \ldots + 2 + 1 = 210 \text{ букетов.}$$

Ровно 210 букетов получается, например, если каждому учителю $T_i$ дарили букеты ученики $T_1, \ldots T_i$.

| 9. ЧИСЛА НА КЛЕТЧАТОМ ПОЛЕ | КЛАСС |
|---|---|
| | 7 8 9 |

В ячейках клетчатого поля ax8 Аркаша расставил числа, никакие два из которых не повторяются, а любые соседние по стороне ячейки содержат числа, разность по модулю которых не превышает 5. Найдите максимально возможное значение a.

**Ответ:** 5.

**Решение**

Докажем, что при наиболее оптимальном варианте расположения чисел мы получим не более 5 строк.

Начнем располагать числа с наименьшего a, находящегося в одном из углов. Соседние по стороне ячейки заполним a+1 и a+2. С ними соседними по сторонам будут еще 3 ячейки, заполним их: a+3,…,a+5. Таким образом, на каждом шаге кол-во строк и количество граничащих по сторонам ячеек будет увеличиваться на 1. Максимальная разница между соседними по сторонам ячейками будет также увеличиваться на 1. Таким образом, достигнув 5 строки, мы получим максимально возможное значение a.

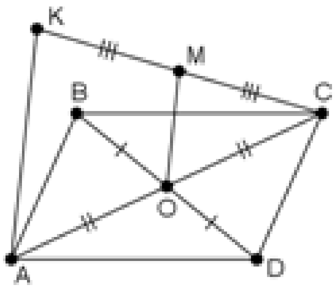
При других вариантах расположения чисел рост числа соседних по сторонам ячеек будет более быстрым.

| 10. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ | КЛАСС |
| --- | --- |
| | 8 |

Дан параллелограмм ABCD. Точка P такая, что AP = BD. Q – середина PC. Найдите сумму углов DBM и BDM

**Решение**

Пусть O – центр параллелограмма. Тогда OM – средняя линия треугольника CAK (OM = ½ AK и в случае, когда K лежит на прямой CA). Поэтому в треугольнике BMD медиана MO равна половине противоположной стороны BD = AK. Значит, угол BMD прямой.




| 11. ПОСТРОЕНИЕ ТРАПЕЦИИ | КЛАСС |
| --- | --- |
| | 8 9 |

С помощью циркуля и линейки постройте трапецию ABCD с основаниями AD и BC, если $\frac{AD}{BC} = a, \angle A = \alpha, \angle B = \beta, h\ -$ высота.

Пусть $a = \frac{m}{n}$ – данное отношение оснований.

Строим треугольник с основанием *BC*, равным *n* и данными углами при этом основании. На основании *BC* откладываем отрезок *BK*, равный *m*, и через точку *K* проводим прямую, параллельную стороне *AB*, до пересечения со стороной *AC* в точке *M*. Через точку *M* проводим прямую, параллельную основанию *BC*, до пересечения со стороной *AB* в точке *N*. Тогда *BCMN* — трапеция с основаниями *BC* = *n* и *MN* = *m* и данными углами при основании.

Пусть *MP* — её высота. На луче *PM* откладываем отрезок *PQ*, равный данной высоте, и проводим через точку *Q* прямую, параллельную *BC*. Пусть эта прямая пересекает луч *BM* в точке $M_1$. Тогда $M_1$ — вершина искомой трапеции. Остальные вершины — это точка *B*, точка $N_1$ пересечения $M_1Q$ с лучом *BN* и точка $C_1$ пересечения прямой, проходящей через точку $M_1$ параллельно $MC$, с лучом $BC$. Трапеция $BC_1M_1N_1$ искомая, поскольку она гомотетична трапеции $BCMN$.

| 12. ДРУЖБА | КЛАСС |
|---|---|
| | 9 10 11 |

На острове Недружелюбия живет 25 человек, которые стремятся дружить с как можно меньшим количеством островитян. Однако по местному закону среди каждых троих жителей есть хотя бы два друга (дружба взаимна). Рик и Морти посетили несколько параллельных миров, увидев все возможные комбинации описанной выше ситуации, а также записали в блокноте в каждом случае число друзей у самого дружелюбного островитянина. Какое наименьшее число было записано?

**Ответ:** 12.

**Решение**

Рассмотрим двоих островитян, не дружащих между собой. (В противном случае все ученики класса дружат между собой, тогда у каждого из них имеется 24 друга, и задача решена.)

Пусть этими двумя будут A и B. Тогда из оставшихся 23 островитян каждый дружит либо с A, либо с B. Действительно, если бы кто-то (скажем, C) не дружил бы ни с A, ни с B, то мы имели бы троих островитян, среди которых не было бы друзей. Теперь если предположить, что и A, и B имеют не более 11 друзей, то всего на острове, кроме этих двоих, было бы не больше 22 человек (принцип Дирихле). Полученное противоречие показывает, что один из островитян имеет не менее 12 друзей.

| 13. ФУТБОЛ | КЛАСС |
|---|---|
| | 9 10 11 |

Аркаша нарисовал таблицу, состоящую из 12 столбцов (пронумеруем A,B…), и разместил там названия 12 футбольных клубов, сыгравших к этому моменту друг с другом по одному разу.

Следующие 12 строк он пронумеровал числами 1;2;…;12.

Затем каждую строчку под каждым из клубов Аркаша заполнял следующим образом: в ячейке A_1 – первый клуб, в ячейке A_n – клубы, записанные в A_(n-1) + клубы, у которых они выиграли.

Оказалось, что в каждом столбце 12-я ячейка отличалась от 11й. Сколько всего оказалось ничьих при таких условиях?

**Решение**

Рассмотрим ориентированный граф, в вершинах которого – клубы, а стрелки ведут от выигравшего к проигравшему. Согласно условию, для каждого клуба есть другой, до которого можно добраться, минуя 11 стрелок (это, в частности, означает, что от каждого клуба можно добраться до любого другого). Рассмотрим такой путь: $A_1$ выиграл у $A_2$, $A_2$ – у $A_3$, …, $A_{11}$ – у $A_{12}$. Заметим, что $A_i$ $(1 < i < 12)$ не мог выиграть у $A_1$ (иначе от $A_2$ можно было бы добраться до каждого не более чем по 10 стрелкам). Но кто-то у $A_1$ выиграл (иначе до $A_1$ вообще нельзя было бы добраться), значит, это – $A_{12}$. Как и выше, показываем, что в полученном цикле каждый мог выиграть только у следующего.

Следовательно, результативных партий всего 12, а ничьих – $12 \cdot 11 : 2 - 12 = 54$.

**Ответ:** 54 ничьих.

| 14. КОРНИ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ | КЛАСС |
|---|---|
| | 10 11 |

Для всевозможных значений $p = 1,2,\ldots,2017, m_i$ и $n_i$ – корни уравнения

$$x^2 - 2x - p^2 - p = 0.$$

Найдите сумму $(n_i + m_i)/(m_i * n_i)$ при i, меняющемся от 1 до 2017.

**Ответ:** $-\frac{2017}{1009}$.

**Решение**

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{m_{2017}} + \frac{1}{n_{2017}} = \sum_{i=1}^{2017}\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{n_i}\right) = \sum_{i=1}^{2017}\left(\frac{m_i + n_i}{m_i n_i}\right)$$

Из теоремы Виета:

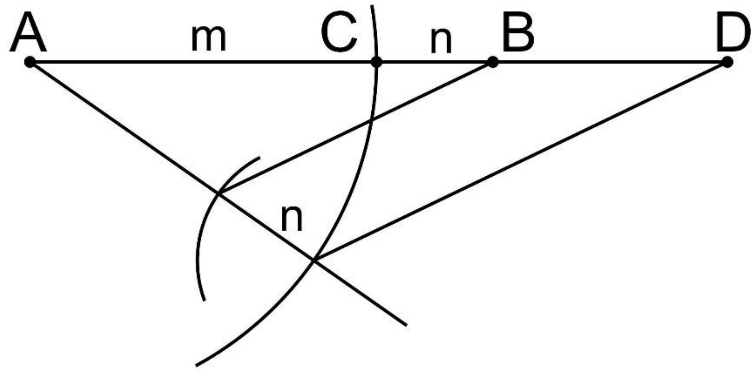
$$m_i + n_i = 2, m_i n_i = -\mathrm{p}^2 - \mathrm{p}$$

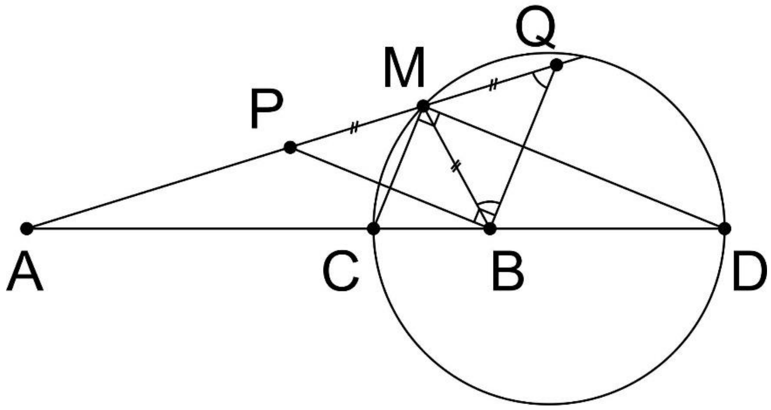
Т.е.

$$\sum_{i=1}^{2017}\left(\frac{m_i + n_i}{m_i n_i}\right) = -2\sum_{i=1}^{2017}\frac{1}{p(p+1)} = -2\sum_{i=1}^{2017}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = -\frac{2017}{1009}.$$

| 15.ЗАДАЧА АПОЛЛОНИЯ | КЛАСС |
|---|---|
| | 10 11 |

На прямой даны точки A, C, B, D в указанном порядке, причем точка C делит отрезок AB внутренним образом в том же отношении, что и точка D делит его внешним образом. M - произвольная точка окружности с диаметром CD. Доказать, что MC - биссектриса угла AMB, а MD - биссектриса внешнего угла треугольника AMB при вершине M.




**Решение**

Проведем $BP//MD, BQ//MC$. $\angle PBQ = 90°$.

Обозначим $AC = m, CB = n$.

Имеем:

$AM{:}MQ = AM{:}MP = m{:}n \;=>\; MP = MQ = MB \;=>$

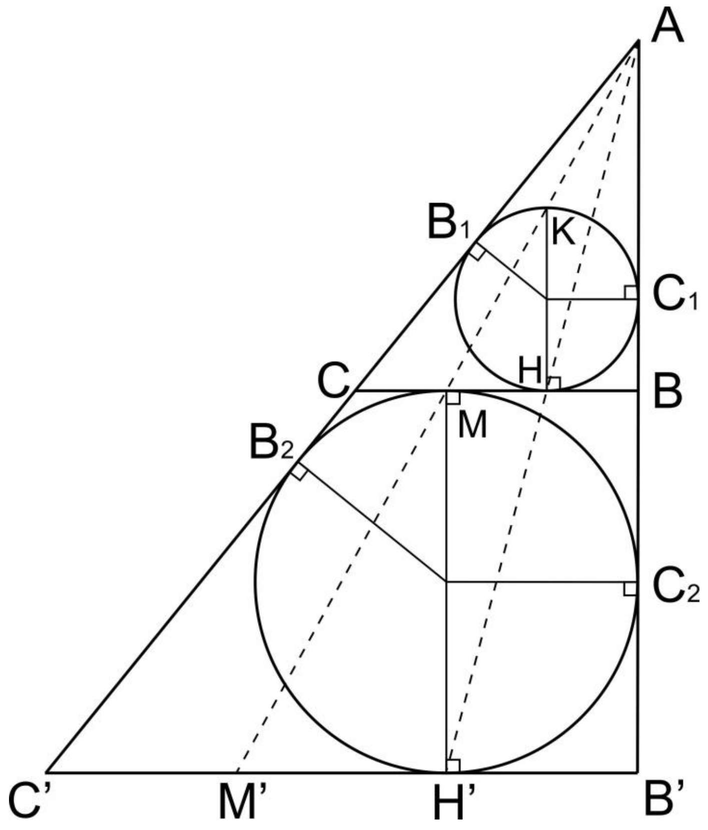
$=> \angle MQB = \angle MBQ => \angle MQB = \angle AMC,$

но $\angle CMB = \angle MBQ = \angle MQB = \angle AMC$.

| 16. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА | КЛАСС |
|---|---|
| | 10 11 |

Построить треугольник ABC, если известна разность AC и BA, длина высоты, проведенной из вершины A, и радиус r вписанной в ABC окружности.

**Решение**




**Анализ.** Предположим, что $\Delta ABC$ построен, тогда окружность $\omega$, вписанная в него, отображается в гомотетии с центром A в окружность $\omega'$, вневписанную. При этом точка K отображается в точку M касания вневписанной окружности.

Отрезок $BH = \frac{a+c-b}{2}$. Докажем это. Пусть $BH = x$.

Тогда $BC_1 = x, AC_1 = AB_1 = c - x, CB_1 = CH = a - x$. Имеем:

$$\frac{a+c+b}{2} = a - x + x + c - x => x = \frac{a+c-b}{2}.$$

Найдем коэффициент k гомотетии. Пусть $CM = y, BM = a - y, B'C_2 = kc - c - (a - y) = kc - c - a + y. C'H' = C'B_2 = kb - b - y$.

$$C'B' = ka;\ C'B' = C'H' + H'B' = kb - b + kc - c - a => k = \frac{a+b+c}{c+b-a}.$$

Найдем y.

$$MH = a - x - y; M'H' = k(a - x - y).$$

$$C'M' = ky;\quad C'M' = C'H' - M'H' = kb - b - y - k(a - x - y) => y = \frac{a-b+c}{2} = x.$$

Следовательно, $MH = a - 2x = b - c$.

## Построение

1) Строим прямоугольный $\Delta MHK$: $MH = b - c$; $HK = 2r$; $\angle MHK = 90°$.
2) Строим окружность $\omega$ с диаметром $HK = 2r$.
3) Проводим прямую $l // MH, \rho(l, MH) = h_a$.
4) $MK \cap l = A$.
5) Через $A$ проводим касательные к окружности $\omega$.
6) Касательные пересекают прямую $MH$ в точках $C$ и $B$.