

## 10 класс

Планируется, что обязательная часть экзамена 10 класса будет включать в себя 6 заданий. Продолжительность этой части экзамена – 180 минут.

Ориентировочные сроки: 18 мая 2016 года (во всех школах сообщества эта часть экзамена проходит одновременно).

### Тематика задач (нумерация – условная)

**№1 Уравнение (тригонометрическое или иррациональное)**

**№2 Неравенство (рациональное или логарифмическое/показательное) или система неравенств**

**№3 Делимость (чисел или многочленов)**

**№4 Исследование функции и использование построенного графика**

**№5 Планиметрия**

**№6 Стереометрия**

В заданиях №№1 – 3 школа имеет право выбрать одно из двух заданий (в зависимости от используемой ими программы и учебника).

### Примеры заданий

В каждом пункте по три примера возможных типов заданий.

#### 1А. Тригонометрическое уравнение

1) а) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $a\sin 3x - \cos 3x = 3a - 1$  имеет корни?

б) Найдите корни этого уравнения при  $a = 0,75$ .

2) а) Решите уравнение:  $\cos^2 x + 3\cos 4x = b$ , если один из корней этого уравнения равен  $\frac{\pi}{3}$ .

б) Среди найденных чисел укажите те, которые удовлетворяют неравенству

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Найдите количество решений уравнения  $\cos 4\pi x \cdot \sin 8\pi x = \cos \pi x \cdot \sin 11\pi x$ , принадлежащих отрезку  $[-2; -1]$ .

#### 1Б. Иррациональное уравнение

1) Решите уравнение  $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1,5(x + 4)$  и сравните среднее арифметическое его корней с числом  $\frac{\sqrt{7}}{3}$ .

2) Решите уравнение  $3x + 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 4 - \sqrt{x - 1} - \sqrt{2x - 1}$ .

3) а) Решите уравнение  $\sqrt{x + 3} - 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} - 6\sqrt{x - 1} = 1$ .

б) Является ли число  $7\sqrt{2}$  его корнем?

#### 2А. Рациональное неравенство или система неравенств

1) Решите неравенство:  $\frac{\sqrt{4-x^2} \cdot |3-5x|}{(x+3)(2x-1)(2x+3)} \leq 0$ .

2) Решите неравенство:  $\frac{(x^2 - 3x + 2)(4 - x^2)}{x^3 - 3x^2} \leq 0$ .

3) Решите систему неравенств: 
$$\begin{cases} \frac{3x}{x^2 + 2} \leq \frac{2}{x} \\ |5x + 4|^{-1} \leq \frac{1}{12} \end{cases}$$

#### 2Б. Логарифмическое или показательное неравенство

1) Решите неравенство:  $\log_{x+2}(2x^2 + x) \leq 2$ .

2) Решите неравенство:  $\frac{1}{5^x + 6} \geq \frac{4}{5^{x+1} - 1}$ .

3) Решите неравенство:  $\log_{2-2^y} \frac{2^{2y+5} - 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y}{2^{1-y} - 1} + 1 \leq 0$ .

### 3А. Делимость чисел

1) Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n : 24$

2) Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $17^n - 2^{2n} + 16^n - 3^{4n} : 13$

3) При каких  $n \in \mathbb{N}$  дробь  $\frac{2n+1}{n^2-1}$  несократима?

### 3Б. Делимость многочленов

1) Многочлен  $P(x) = ax^4 - 15x^3 + 40x^2 - 45x + b$  делится на  $(2x - 3)$ , а при делении на  $(x + 1)$  дает остаток 120. Найдите значения  $a$  и  $b$  и все корни многочлена.

2) Многочлен  $P(x)$  делится на  $(x + 1)$ , а при делении на  $(x^2 - 3x)$  даёт в остатке  $(7x - 1)$ . Найдите остаток от деления  $P(x)$  на  $(x^3 - 2x^2 - 3x)$ .

3) Найдите многочлен четвертой степени со старшим коэффициентом 1, у которого число  $-2$  является корнем кратности три, а его остаток от деления на  $(x - 3)$  равен  $-1$ .

### 4. Исследование функции и использование построенного графика

1) а) Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{1}{9}x(4+x)^3$  и постройте ее график.

б) При каких значениях  $m$  уравнение  $f(x) = m$  имеет не более одного корня?

2) а) Постройте график функции  $f(x) = \frac{1-x}{|x-3|-3}$ .

б) Существует ли касательная к графику этой функции в точке  $x_0 = 3$ ?

3) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2} = a$  имеет корни?

### 5. Планиметрия

1) Прямая проходит через центр квадрата со стороной 1. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин квадрата до этой прямой.

2) В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AK$ . Известно, что совпадают центры двух окружностей: вписанной в треугольник  $ABK$  и описанной около треугольника  $ABC$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

3) Найдите наибольший периметр параллелограмма, диагонали которого 6 см и 8 см.

### 6. Стереометрия

1) Две правильные пирамиды  $DABC$  и  $FABC$  имеют общее основание  $ABC$  и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах  $D$  и  $F$  прямые. Боковое ребро каждой пирамиды равно 1. Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BF$ .

2)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб, точка  $P$  лежит на ребре  $AA_1$  и  $AP : A_1P = 2 : 1$ . Определите угол между плоскостью  $B_1PD$  и плоскостью грани  $ABCD$ .

3)  $PABCD$  – правильная четырёхугольная пирамида, сторона основания  $ABCD$  которой равна 4, высота пирамиды  $PO$  также равна 4, точка  $M$  – середина ребра  $AD$ . Найдите расстояние от вершины  $C$  до плоскости  $PMB$ .