8–11 классы

II КАВКАЗСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Д. МАМИЙ,
г. Майкоп, Республика Адыгея,
фото А. Кирноса
и студентов медиа-центра АГУ

С решением задач можно познакомиться на странице http://cmo.adygmath.ru/node/21

С 13 по 18 марта 2017 года в Республике Адыгее прошла международная олимпиада школьников — II Кавказская математическая олимпиада.

Впервые олимпиада состоялась в 2015 / 2016 учебном году в образовательном центре «Сириус» (г. Сочи), в ней приняли участие школьники из 15 регионов Юга России (ЮФО и СКФО).

В этом году организаторами олимпиады стали Министерство образования и науки Республики Адыгея и Адыгейский государственный университет. Идея проведения олимпиады в Адыгее была поддержана руководством республики, взявшим на себя основную часть расходов по ее проведению. Спонсорскую помощь олимпиаде оказала компания «ITV AXXON» — лидер российского рынка в области обработки видеоизображений.

Особенностью II Кавказской математической олимпиады стал ее международный статус. В олимпиаде приняли участие 110 школьников: представители 15 регионов Южного и Северо-Кавказского федеральных округов и стран Закавказья — Армении, Абхазии и Южной Осетии.

Цель олимпиады — содействие формированию единого культурного и образовательного пространства, объединяющего регионы Юга России и страны Кавказа, развитие и укрепление дружеских связей между школьниками России и кавказских республик, увлеченными математикой.

Одна из основных задач олимпиады — подготовка обучающихся к заключительному этапу Всероссийской олимпиады школьников по математике и заключительным этапам национальных олимпиад стран-участниц.

Олимпиада проводилась по заданиям, уровень трудности которых соответствует уровню трудности заданий окружного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике до 2008 года. Задачный комитет олимпиады состоял из членов Центральной предметно-методической комиссии Всероссийской олимпиады.

Об уровне прошедшей олимпиады свидетельствует состав жюри, большая часть членов которого — это члены жюри Всероссийской математической олимпиады школьников, в прошлом победители и призеры всероссийских и международных олимпиад.

В состав координационного совета олимпиады вошли Н. Агаханов, доцент МФТИ, руководитель национальной команды России по математике, член координационного совета Международной математической олимпиады, и Н. Андреев, заведующий Лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, создатель проекта «Математические этюды». Программа членов координационного совета была предельно насыщенной и включала многочисленные встречи с преподавателями математики, студентами и школьниками практически всех районов Республики Адыгея. Так, Н. Агаханов провел заседание круглого стола, посвященного проблемам подготовки школьников к олимпиадам, с участием преподавателей средних общеобразовательных школ, а Н. Андреев прочитал лекцию для учителей математики о том, как увлечь школьников этой наукой, а потом в течение двух дней проводил встречи с юными поклонниками математики.

Сама же олимпиада прошла в двух возрастных группах (лигах): юниорской (8–9-е классы) и старшей (10–11-е классы).

К участию в олимпиаде координационным советом были приглашены:

– победители и призеры заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике среди 9–10-х классов или заключительного этапа олимпиады им. Л. Эйлера 2015/2016 учебного года;

– победители регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике среди 9–11-х классов или регионального этапа олимпиады им. Л. Эйлера 2016/2017 учебного года в регионах Юга России;

– победители и призеры региональных и заключительных этапов национальных математических олимпиад зарубежных стран.

На протяжении шести дней участники олимпиады решали задачи, ездили на экскурсии, вечерами пели под гитару, а студенты-волонтеры факультета математики и компьютерных наук учили их адыгейским танцам. Ребята остались в восторге от красот Горной Адыгеи, ее водопадов и отвесных скал, хотя прозвучала весьма красноречивая реплика от одного из юных конкурсантов: «Меньше экскурсий, больше задач»! На что последовал вполне закономерный ответ одного из членов жюри о том, что настоящий математик — это всесторонне образованный человек, который никогда не теряет главного качества настоящего исследователя — любопытства. Но, тем не менее, баланс дела и отдыха дал крен в пользу математики, и большую часть времени ребята совершенно точно посвятили любимой науке.

Ход олимпиады отражался на сайте cmo.adygmath.ru и в группе «ВКонтакте». За эти дни журналистами пресс-центра олимпиады (а это были студенты-волонтеры Адыгейского госуниверситета) было выложено в Сеть более 1000 фотографий самых интересных моментов олимпиады, сняты видеоролики и написаны десятки постов.

И вот торжественная церемония закрытия олимпиады в главном зале республики — Государственной филармонии Адыгеи.

Всего жюри отметило почетными грамотами, дипломами и памятными подарками достижения 72 участников олимпиады, 41 из которых стали победителями и призерами.

Обладателями дипломов I степени стали среди обучающихся 8–9-х классов (юниорская лига):

Гагик Магакян (9-й класс, Республика Армения), ***Данила Демин*** (8-й класс, Краснодарский край), ***Данила Зинченко*** (9-й класс, Республика Адыгея), ***Тигран Чтчян*** (8 класс, Республика Армения), ***Абдулкадыр Бучаев*** (9-й класс, Республика Дагестан), ***Пщимаф Наниз*** (8-й класс, Республика Адыгея), ***Семен Паненко*** (8-й класс, Краснодарский край), ***Армен Асриян*** (9-й класс, Республика Армения).

Дипломом I степени за лучший результат среди школьников 10–11-х классов (старшая лига) награжден ***Алексей Бердовский*** (10-й класс, Краснодарский край).

Следует добавить, что эмблемой Кавказской математической олимпиады стало Дерево Математических Знаний работы талантливого майкопского художника Татьяны Вагановой. На торжественном открытии олимпиады представители делегаций зажигали на ветвях этого дерева свои знаки-символы, а когда во время церемонии закрытия они же гасили их, многие в зале не могли сдержать слез: настолько сдружила ребят Адыгея и математика, что расставаться не хотелось никому.

Об особой дружеской атмосфере, царившей на олимпиаде, свидетельствуют и стихи, написанные членом жюри — старшим преподавателем Саратовского государственного университета О. Дмитриевым.

Вороны

В Майкопе ворон не считают,
Друзей тут считают всегда,
И смело они прилетают,
Покинув свои города.
Не тратя минуты на сборы,
На встречу спешат поскорей —
Майкопу важны не вороны,
А стаи надежных друзей!

Условия задач

8–9-е классы

1. Вася решал пример на сложение двух дробей: $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где a, b, c, d — некоторые числа, отличные от 0. Однако он вместо сложения верно выполнил умножение дробей. При этом ответ у Васи совпал с ответом в задачнике. Выясните, чему в таком случае равна сумма дробей $\frac{b}{a}$ и $\frac{d}{c}$.

2. В марсианском баскетболе в составе команды ровно шесть игроков. Тренер сборной Марса может собрать состав из любых шести игроков, выбрав из 100 кандидатов. При этом некоторые составы тренер считает *сыгранными*, а некоторые нет (хотя бы один сыгранный состав существует). Назовем пятерку кандидатов *перспективной*, если к ней можно добавить еще одного кандидата и получить сыгранный состав. Назовем кандидата *универсальным*, если он дополняет до сыгранного состава любую перспективную пятерку кандидатов (в которую он сам не входит). Тренер собрал состав из шести универсальных кандидатов. Обязательно ли этот состав является сыгранным?

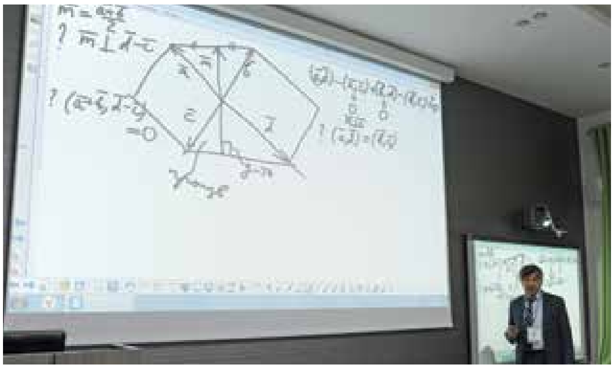
3. Найдите наименьшее натуральное n, для которого верно следующее утверждение: если натуральные числа a и b таковы, что $a + b$ делится на 36, а ab делится на n, то каждое из чисел a и b делится на 36.

4. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC, BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

5. В футбольном турнире участвовало 20 команд, каждая сыграла с каждой ровно один матч. За победу дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме команды набрали 554 очка. Докажите, что найдется 7 команд, каждая из которых сыграла хотя бы один раз вничью.

6. Треугольник разбили тремя отрезками, выходящими из трех его вершин, на семь частей: четыре треугольника и три четырехугольника. Могут ли все эти три четырехугольника оказаться вписанными?

7. На доске записано 10 различных чисел. Профессор Odd вычислил все возможные про-



изведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве (по 1, по 3, по 5, по 7, по 9), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Профессор Even также вычислил все возможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве (по 2, по 4, по 6, по 8, по 10), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке профессора Odd на 1 больше, чем сумма на листке профессора Even. Докажите, что одно из чисел, записанных на доске, равно 1.

8. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Одна из этих точек красная, а остальные синие. Треугольник с вершинами в синих точках называется хорошим, если красная точка находится внутри него. Может ли оказаться, что количество хороших треугольников составляет не менее половины от общего количества треугольников с вершинами в синих точках?

10–11-е классы

1. Точки A и B лежат на разных ветвях гиперболы, заданной уравнением $y=\frac{1}{x}$. Пусть A_x и A_y — проекции точки A на координатные оси, а B_x и B_y — проекции точки B на координатные оси. Докажите, что площади треугольников AB_xB_y и BA_xA_y равны.

2. В марсианском баскетболе в составе команды ровно шесть игроков. Тренер сборной Марса может собрать состав из любых шести игроков из 100 кандидатов. При этом некоторые составы тренер считает *сыгранными*, а некоторые — нет (хотя бы один сыгранный состав существует). Назовем пятерку кандидатов *перспективной*, если к ней можно добавить еще одного кандидата и получить сыгранный состав. Назовем кандидата *универсальным*, если он дополняет до сыгранного состава любую перспективную пятерку кандидатов (в которую он сам не входит). Тренер собрал состав из шести универсальных кандидатов. Обязательно ли этот состав является сыгранным?

3. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC, BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

4. Существуют ли такие 101 натуральных числа, необязательно различные, произведение которых равно сумме всех их попарных наименьших общих кратных?

5. В футбольном турнире участвовало 20 команд, каждая сыграла с каждой ровно один матч. За победу дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме команды набрали 554 очка. Докажите, что найдется 7 команд, каждая из которых сыграла хотя бы один раз вничью.

6. Действительные числа a, b и c таковы, что

$$\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right|<2.$$

Докажите, что для этих чисел верны также неравенства

$$\left|\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right|<2 \text{ и } \left|\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}\right|<2.$$

7. На каркасе единичного куба находится восемь муравьев. Докажите, что найдется два муравья на расстоянии, не превышающем 1.

8. Стол имеет форму правильного 1000-угольника со стороной 1. В одной из вершин этого 1000-угольника сидит жук. Все 1000 вершин нумеруются в некотором порядке числами 1, 2, ..., 1000 так, что жук изначально находится в вершине с номером 1. Жук может ползти только по краю стола и только по часовой стрелке. Он начинает ползти из вершины 1 и ползет без остановки, пока не достигнет вершины 2, в которой делает остановку. Далее он продолжает путь по часовой стрелке из вершины 2, пока не достигнет вершины 3, в которой делает остановку, и т.д. Жук заканчивает свой путь в вершине номер 1000. Найдите количество нумераций вершин, для которых длина пути жука равняется 2017.