XX ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Что требуется от участников конкурса? Обычные учительские навыки — умение решать задачи и находить ошибки в решениях. Чтобы познакомиться с конкурсом, если вы еще не принимали в нем участия, вы можете прочитать материал о результатах заочного конкурса 2024 года, опубликованный в № 6/2024.

Что дает участие в конкурсе? Победители и призеры конкурса награждаются соответствующими дипломами журнала «Математика». Участники, не ставшие победителями или призерами, но показавшие достойные результаты, получают сертификаты участников.

Что нужно делать? Вам предлагается выполнить 9 заданий, разбитых на три блока: математический (задания 1–5), методический (задания 6–8) и аналитический (задание 9).

Работы (нексерокопированные, напечатанные или написанные ярким цветом и разборчиво) следует выслать с пометкой «На конкурс» по адресу: редакция журнала «Математика», Большой Власьевский пер., д. 11, ком. 211, Москва, 119002, либо по электронному адресу konkurs.uchiteley.matematiki@gmail.com с темой «На конкурс_ФИО». Срок отправки работ — до 20 апреля 2025 года (по почтовому штемпелю либо по дате отправки электронного письма). Все вопросы по оформлению работ вы также можете направить на адрес konkurs.uchiteley.matematiki@gmail.com.

Сразу после отправки работы вы заполняете заявку на участие по ссылке https://forms.gle/qe8rtBHJcFY8nf9z7 или наведя камеру телефона на QR-код. В случае отсутствия у вас доступа в интернет заявку надо прислать по почте вместе с работой (заполненный бланк, см. ниже). Вопросы по оформлению заявки можно задать по адресу proektmat@gmail.com.

К участию допускаются и коллективные работы (в составе коллектива авторов — не больше трех человек).

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

Приглашаем вас к участию в конкурсе и желаем успеха!

Заявка участника конкурса

Форма участия (*нужное подчеркнуть*)	индивидуальная / коллективная
ФИО	
Домашний адрес	
Индекс	
Телефон	
Адрес электронной почты	
Место работы	
Должность	
Недельная нагрузка в этом учебном году	

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

I. Решите задачи

1. Имеется девять карточек, на которых записаны цифры от 1 до 9. Какое наибольшее количество карточек можно выложить в ряд слева направо так, чтобы числа на любых двух соседних карточках образовали двузначное число, являющееся квадратом целого числа?

2. Существует ли тетраэдр, в котором основания ровно двух высот лежат вне граней тетраэдра?

3. На уменьшенной шахматной доске размером 6×6 расставлены короли и слоны так, что короли не бьют друг друга и слоны не бьют друг друга. Какое наибольшее количество этих фигур может стоять на такой доске?

4. Сколько решений имеет система уравнений

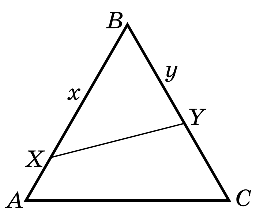
$$\begin{cases} (2x+y+1)^2 = 5z, \\ (-x+y+1)^2 = 2z, \\ (x+2y-2)^2 = 5z? \end{cases}$$

5. На сторонах остроугольного треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Также на сторонах треугольника ABC, но во внутреннюю часть, построены правильные треугольники с центрами O_1, O_2, O_3. Пусть L, N и K — точки, делящие отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно в отношениях 1 : 2, считая от вершин треугольника ABC, а T — точка Торричелли треугольника ABC. Докажите, что семь точек: O_1, O_2, O_3, L, N, K и T, лежат на одной окружности.

II. Методический блок

В заданиях № 6–8 могут содержаться математические ошибки и недочеты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочеты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

6. «Задача». Дан правильный треугольник со стороной 1. Докажите, что наименьшая длина линии, соединяющей точки на двух его сторонах и делящей площадь треугольника пополам, равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



«*Решение*». Пусть точки X и Y лежат на сторонах AB и BC правильного треугольника ABC со стороной 1 (см. рисунок). Проведем отрезок XY и оценим его длину.

Введем обозначения:

$$BX = x,\ BY = y.$$

По условию

$$\frac{S_{XBY}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\frac{0{,}5xy\sin\angle ABC}{0{,}5AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC} = xy = \frac{1}{2}.$$

По теореме косинусов для треугольника BXY:

$$XY^2 = x^2 + y^2 - xy \ge xy = \frac{1}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y$, то есть когда $XY \parallel AC$. Следовательно, наименьшее значение длины XY равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. «Задача». Какие значения может принимать $f(0)$, если $f(f(x)) = x^2 - x + 1$?

«*Ответ*»: $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$.

«*Решение*». Заметим, что если

$$f(0) = 0, \text{ то } f(f(0)) = f(0) = 1.$$

Аналогично если

$$f(0) = 1, \text{ то } f(f(0)) = f(1) = 1.$$

Значит, $f(0) = 0$ и $f(0) = 1$ являются решениями задачи.

Докажем, что других решений нет.

Пусть $f(0) = t$, тогда

$$f(t) = (t - 0{,}5)^2 + 0{,}75.$$

Если $t < 0$ или $t > 1$, то

$$(t - 0{,}5)^2 > 0{,}25,$$

поэтому $f(t) > 1$.

Если $0 < t < 1$, то

$$(t - 0{,}5)^2 < 0{,}25,$$

поэтому $f(t) < 1$.

8. «Задача». На клетчатой бумаге отмечено 49 узлов сетки, являющихся вершинами клеток квадрата 6×6. Требуется провести несколько единичных отрезков с концами в отмеченных узлах так, чтобы между каждой парой соседних узлов был путь длины не больше 3. Докажите, что потребуется провести не меньше 52 отрезков.

«*Решение*». Решим сначала аналогичную задачу для 16 узлов, являющихся вершинами клеток квадрата 3×3. Пусть некоторые из них соединены единичными отрезками так, чтобы выполнялось условие задачи. Будем рассматривать полученную картинку как граф. В нем каждые две вершины, находящиеся на расстоянии 1, соединены либо ребром, либо путем длины 3, значит, этот граф связный.

Докажем, что в графе есть цикл, то есть он не может быть деревом. Из этого будет следовать, что в нем не меньше 16 ребер. Рассмотрим четыре вершины, расположенные внутри квадрата. Если каждая пара соседних из них соединена ребром, то эти ребра образуют цикл. Если же какие-то две соседние вершины A и B не соединены ребром, то между ними есть путь, проходящий по трем сторонам одной из примыкающих к ним клеток. Возьмем вторую примыкающую к ним клетку и посмотрим на три пары ее соседних вершин, кроме A и B. Каждая пара соединена либо ребром, либо путем длины 3, который при этом не содержит ребро AB. Вместе с путем между A и B все они образуют цикл.

Таким образом, в квадрате 3×3 необходимо провести не меньше 16 отрезков. Перейдем к оценке количества отрезков для квадрата 6×6. Если разбить его на четыре квадрата 3×3, то в них суммарно должно быть проведено хотя бы $16 \cdot 4 = 64$ отрезка. При этом дважды мы могли учесть максимум 12 отрезков, находящихся на общих сторонах квадратов 3×3. Следовательно, всего отрезков не меньше $64 - 12 = 52$.

III. Аналитический блок

9. В федеральную рабочую программу для углубленного изучения математики в 10–11-х классах включены элементы линейной алгебры. Далее цитата из ФРП:

«Матрица системы линейных уравнений. Определитель матрицы 2×2, его геометрический смысл и свойства, вычисление его значения, применение определителя для решения системы линейных уравнений. Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений. Исследование построенной модели с помощью матриц и определителей».

Проанализируйте целесообразность, плюсы и минусы такого изменения школьного курса.

Окончание. Начало см. на с. 44.

В период с 12 по 18 марта 2025 года во Владикавказе пройдет XXI Межрегиональная научно-практическая конференция «Владикавказские Колмогоровские чтения».

Краткая информация о мероприятиях конференции

1. Конкурс исследовательских работ школьников по профильным направлениям: математика, физика, информатика и математическое моделирование, химия, биология и гуманитарные дисциплины, для учащихся 5–11-х классов является региональным этапом Международной научной конференции школьников «Колмогоровские чтения» (г. Москва, СУНЦ МГУ). К очному участию в конкурсе допускаются участники, прошедшие отборочный этап (рецензирование исследовательских работ) и получившие специальное приглашение от оргкомитета конференции.

К участию в конкурсе допускаются исследовательские работы, подготовленные одним или двумя авторами-школьниками под руководством одного или двух научных руководителей. Научные руководители участников конкурса не могут выступать в качестве соавторов исследовательской работы. Требования к оформлению статьи с результатами исследовательской работы участника конкурса и тезисов доклада представлены на сайте конференции.

Обязательным условием выступления на конкурсе является наличие компьютерной презентации и распечатанного варианта доклада для членов жюри.

2. Очная олимпиада участников конкурса исследовательских работ школьников по профильному направлению. Олимпиада является обязательным этапом конкурса исследовательских работ школьников по профильному направлению в соответствии с представленной на конкурс исследовательской работой: математика, физика, информатика и математическое моделирование, биология, химия, гуманитарные дисциплины (история и этнография, филология).

3. Междисциплинарная секция по теории и методике обучения физико-математическим, естественно-научным и гуманитарным дисциплинам является профессиональной площадкой учителей — участников конференции для представления опыта работы, методических разработок, инновационных образовательных практик, результатов исследовательской методической деятельности. Лучшие работы, представленные на данной секции, рекомендуются оргкомитетом конференции для участия во всероссийских и международных конференциях по теории и методике обучения математике, физике, информатике и математическому моделированию, химии, биологии, гуманитарным дисциплинам, а также для публикации в профильных научных журналах.