# XII ЗАОЧНЫЙ ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

**Что требуется от участника конкурса?** Обычные учительские навыки — умение решать задачи и находить ошибки в решениях.

О результатах заочного конкурса 2016 года читайте № 11–12/2016.

**Что дает участие в конкурсе?** Победители и призеры конкурса, как и в предыдущие годы, награждаются дипломами журнала «Математика». Участники, не ставшие победителями или призерами, но показавшие достойные результаты, получат сертификаты участников.

Кроме того, победители и призеры конкурса, которые в следующем учебном году будут иметь учебную нагрузку не менее 9 часов в неделю, будут традиционно приглашены к участию в XIV очном конкурсе, который пройдет в Москве в сентябре 2017 года.

**Что нужно делать?** Вам предлагается выполнить девять заданий, разбитых на три блока: математический (задания № 1–5), методический (задания № 6–8) и аналитический (задание № 9).

Работы (не ксерокопированные и не сканированные) следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика», Б. Власьевский пер., д. 11, ком. 211, Москва, 119002 (с пометкой «На конкурс»), либо по электронному адресу proektmat@gmail.com (с темой «На конкурс»). Срок отправки работ — до 20 апреля 2017 года (по почтовому штемпелю). Заявку участника можно заполнить по ссылке https://goo.gl/forms/xq7ayb5okNmVjidh1; для этого обязательно наличие аккаунта (почтового ящика) в Google. Все вопросы по регистрации и оформлению работ вы также можете направить на адрес proektmat@gmail.com.

К участию допускаются и коллективные работы (в составе коллектива авторов — не более трех человек).

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

Приглашаем вас к участию в конкурсе и желаем успеха!

## I. Решите задачи

**1.** Некоторое количество конфет семи различных сортов, где число конфет каждого сорта одно и то же, разложили по пяти вазам. В первую вазу положили 6 конфет — меньше, чем в любую из остальных ваз, а во вторую — 11 конфет, больше, чем в любую из остальных ваз. Сколько конфет каждого сорта раскладывали?

**2.** Вася разобрал каркас куба, чтобы сделать из него тетраэдр, используя все ребра каркаса (одно ребро тетраэдра может содержать несколько ребер куба). Сколькими способами Вася может собрать тетраэдр? Способы считаются различными, если при сборке получаются неравные тетраэдры.

**3.** Три положительных числа $x$, $y$ и $z$ таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**4.** В начале игры на доске записано число 2016. Каждым ходом число можно уменьшить на любую из его ненулевых цифр. Вася называет любое натуральное число $N$ от 1 до 2000, после чего Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Выигрывает тот, кто после своего хода получит число, меньшее $N$. Может ли Вася назвать такое $N$, для которого он гарантированно выиграет?

**5.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 70°, а угол $C$ равен 50°. На сторонах $AB$ и $AC$ отмечены точки $M$ и $N$ соответственно так, что $\angle MCB = 40°$, а $\angle NBC = 50°$. Найдите угол $NMC$.

## II. Методический блок

В предложенных текстах (6 и 7) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»).

Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так.

Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

**6.** «Задача». Натуральное число разрешено увеличивать на любое целое число процентов от 1 до 100, если при этом получается также натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя при помощи таких операций получить из числа 1.

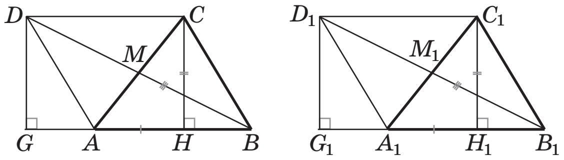
«*Ответ*»: 203.

«*Решение*». Сначала научимся получать числа от 2 до 200. Из числа 1 можно получить 2, увеличив его на 100%. Из числа 2 можно получить числа 3 и 4, увеличив его на 50% и 100% соответственно. Из числа 4 можно получить число 5, увеличив его на 25%. Из числа 5 можно получить любое число от 6 до 10, увеличивая его на число процентов, кратное двадцати. Из числа 10 можно получить любое число от 11 до 20, увеличивая его на число процентов, кратное десяти. Аналогично, из числа 20 — любое число от 21 до 25, из 25 — числа от 26 до 50, из 50 — от 51 до 100, из 100 — от 101 до 200.

Далее, число 201 — это число 134, увеличенное на 50%, а число 202 — увеличенное на 1% число 200. Докажем, что простое число 203 получить нельзя. В самом деле, если 203 получено из числа $m$ увеличением на $n$ процентов, то $203 = m + \frac{mn}{100}$. Тогда $20300 = m(100 + n)$. Один из сомножителей правой части делится на 203. Так как $m < 203$, то на 203 делится $100 + n$. Но тогда мы увеличивали $m$ на $n > 100$ процентов — противоречие.

**7.** «*Задача*». Докажите, что если у треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны стороны $AB$ и $A_1B_1$, равны высоты $CH$ и $C_1H_1$ и равны медианы $BM$ и $B_1M_1$, то такие треугольники равны.

«*Решение*». Продолжим медианы $BM$ и $B_1M_1$ за точки $M$ и $M_1$ соответственно и отложим отрезки $MD = BM$ и $M_1D_1 = B_1M_1$ (см. рис.). Получим параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Из вершин $D$ и $D_1$ опустим перпендикуляры $DG$ и $D_1G_1$ на прямые $AB$ и $A_1B_1$ соответственно. Тогда $DG = CH = C_1H_1 = D_1G_1$, значит, равны прямоугольные треугольники $BDG$ и $B_1D_1G_1$ (по гипотенузе и катету). Следовательно, $\angle DBG = \angle D_1B_1G_1$.




Треугольники $ABM$ и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними:

$AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$.

Тогда $AM = A_1M_1$ а $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$. Из равенства отрезков $AM$ и $A_1M_1$ следует, что $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$:

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Следовательно, треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны.

**8.** Учитель Серафим Полуэктович, жалея детей, хочет подобрать для функции вида $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$ целые значения коэффициентов так, чтобы точки пересечения графика с осями, нули знаменателя, точки экстремумов и точки перегиба графика присутствовали и были рациональными, конечно, без кратных корней в числителе и в знаменателе (он жалеет детей, но не до такой же степени!). Сможет ли учитель это сделать?

Ответьте на вопрос и приведите ход ваших рассуждений.

## III. Аналитический блок

**9.** Основу программы по математике в 5-м и 6-м классах составляют три раздела:

1) «Действия с десятичными дробями»,
2) «Действия с обыкновенными дробями»,
3) «Действия с отрицательными числами и числами с разными знаками».

В различных учебниках математики (а иногда и в разных изданиях одного и того же учебника) выбирается различная последовательность расположения этих разделов по отношению друг к другу.

Опишите плюсы и минусы изучения этих разделов в различном порядке и обоснуйте свою точку зрения. Какой порядок их изучения выберете вы и почему?