

Подготовлено по заказу Министерства финансов Российской Федерации в ходе реализации совместного Проекта Российской Федерации и Международного банка реконструкции и развития «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в Российской Федерации» в рамках «Конкурсной поддержки инициатив в области развития финансовой грамотности и защиты прав потребителей».

**СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ
МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ
ПОДГОТОВКИ/ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ СТУДЕНТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ/УЧИТЕЛЕЙ
МАТЕМАТИКИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И
ФИНАНСОВЫХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ
МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ**

Пояснительная записка

Финансовая грамотность включает в себя понимание роли денег в жизни человека, умение эффективно распорядиться ими и принимать осознанные решения при планировании покупок и в целом расходов и доходов, получении кредитов, страховании и инвестировании.

К сожалению, в школьных учебниках и задачах не хватает заданий и сюжетов, связанных с планированием семейного бюджета, налогами, доходами, расходами, страхованием и т. п. Так сложилось, что вопросам управления личными деньгами школа до сих пор практически не уделяет внимания. Выпускник школы сегодня, как правило, не подготовлен к пользованию деньгами при том, что деньги являются важной и неотъемлемой частью взаимоотношений в обществе.

Наряду с правовой стороной дела (когда и в какие финансовые отношения можно или нельзя вступать), финансовая грамотность включает в себя и математическую составляющую – умение производить расчеты и делать оценки, или прикидки. Школьная математика дает весь необходимый для этого аппарат: школьники с шестого класса знакомы с дробями, долями и процентами, имеют необходимые вычислительные навыки. Позже в школьном курсе появляется геометрическая прогрессия, функции и графики, элементы теории вероятностей и статистики – в общем, все, что необходимо для решения большинства жизненных задач, связанных с личными или семейными финансами.

Задачи по темам финансовой грамотности носят обучающий характер. В отличие от уравнений или неравенств каждая задача этого сборника предполагает осмысление ситуации для принятия осознанного решения либо осмысление полученного результата.

Залогом успеха любого обучения является мотивация учащихся. При рассмотрении сюжетов и задач, связанных с личными финансами, мотивация возникает у учащихся тогда, когда у них появляются первые собственные деньги – хотя бы и карманные, выданные родителями на мелкие расходы. В старших классах школьники уже, как правило, проявляют интерес к вопросам сохранения и накопления сбережений, разумности трат. Часто школьники активно включены в планирование семейного бюджета, хотя бы потому, что значительная часть семейных денег уходит на их нужды.

Настоящий «Сборник методических материалов для студентов педагогических специальностей и учителей математики» является дополнением к «Сборнику математических задач для учащихся 9–11 классов по управлению личными финансами и развитию навыков ответственного, грамотного потребительского поведения на финансовом рынке в рамках школьного курса математики и материалов по подготовке к ЕГЭ/ОГЭ» (далее – Сборник задач).

Сам Сборник задач не претендует на полноту, но все же большая часть финансовых сюжетов, с которыми сталкивается любой человек, нашла отражение в этом пособии. Задания сборника прошли обсуждение в разных регионах Российской Федерации. В обсуждении принимали участие методисты, учителя математики, специалисты финансовой сферы. Задачи разработаны на трех уровнях – базовом, основном и углубленном (более сложные задачи). При этом задачи рассчитаны не только на будущих финансистов или экономистов, но и на школьников, изучающих математику по обычной программе общеобразовательной школы.

Сборник задач имеет тематическую структуру. Внутри каждой темы авторы выделили ряд сюжетов. Например, тема «Потребности и расходы» включает сюжеты о скидках, росте стоимости коммунальных услуг, сравнении цен, колебании курсов валют, взаимодополняющих благах и т. п.

Каждая тема снабжена кратким введением для учащихся, которое содержит описание типичных ситуаций, а также разъясняет термины, встречающиеся в финансовых документах или используемые экономистами и финансистами. Большинство этих слов редко употребляются в обычной речи и отсутствуют в учебниках математики, поэтому трудно ждать от учителя мате-

матики (или от учебника математики) разъяснения термина «альтернативная стоимость» или «аннуитетный платеж». Однако понимание этих и других терминов необходимо при работе с задачами сборника, а впоследствии пригодится и при принятии решений в реальных жизненных ситуациях.

Задачи сборника опираются на математические знания и навыки, которыми должны обладать учащиеся к старшей школе, и не предлагают новых знаний, помимо освоения некоторых финансовых терминов. В этой связи отметим две особенности.

Во-первых, хотя сборник в первую очередь рассчитан на учащихся 9–11-х классов, многие задания доступны младшим школьникам. Отдельные задачи и сюжеты могут быть использованы на уроках математики при изучении процентов, сравнений, неравенств в 6–8-х классах.

Во-вторых, отдельное место в сборнике занимают задачи по темам «Страхование» и «Игры». Обе темы связаны с оценкой ожидаемых рисков и вероятностей, поэтому решение задач этих разделов требует от учащихся общих знаний из теории вероятностей. Например, умения найти математическое ожидание случайной величины.

Здесь мы приводим не только описания ситуаций и финансовых сюжетов, встречающихся в сборнике задач, но и краткий словарь терминов по каждой теме. Не предполагается специальное изучение приведенной терминологии: это делается в ходе решения и обсуждения задач. Да, именно обсуждения, поскольку все задачи жизненные и требуют не только и не столько решения, сколько обсуждения и обмена мнениями о возможных способах действий персонажей, альтернативных способах выхода из той или иной финансовой ситуации.

Главная цель – воспитать в школьнике разумное и осознанное отношение к своим и чужим деньгам. Еще раз подчеркнем: в жизни часто невозможно принять заведомо верное финансовое решение, но можно и нужно принимать решения осознанные и осмысленные, такие, чтобы потом не пришлось никого обвинять в неудачах или собственной неосведомленности («Меня не предупреждали!»).

В настоящих рекомендациях приводятся примеры задач с решением и кратким обсуждением. Задачи II уровня сложности помечены знаком *, задачи III уровня сложности помечены знаком **.

Мы рекомендуем при решении большинства задач на развитие финансовой грамотности пользоваться калькулятором. В жизни редко встречаются задачи с подобранными числами. Использование калькулятора или компьютера при вычислениях никак не умаляет ценности задачи, но позволяет школьнику сконцентрироваться на сути метода и цели задачи, а не на громоздких вычислениях.

Тема 1. Потребности и расходы

1.1. Изменение цен и количества товаров и услуг

Почему важно уметь решать такие задачи

Цена (стоимость) товара и услуги является важнейшим параметром, который мы принимаем во внимание при покупке. При этом цену, как правило, назначает продавец, поэтому цена одного и того же товара может существенно зависеть от места, где вы его приобретаете. Кроме того, цена может различаться и у одного и того же продавца в зависимости от количества приобретаемого товара, сезона и других условий.

Поэтому перед покупкой имеет смысл провести сравнение цен, чтобы выбрать наиболее выгодное предложение. Сделать это не всегда легко. Сравнить можно только сопоставимые товары и услуги (одинакового качества и количества и т.п.). Сравнить цены на качественно различные товары или услуги бессмысленно.

Другой важный момент – цены часто меняются. Продавец может повысить или снизить цену на свой товар или услугу в зависимости от ситуации на рынке. В связи с этим нужно оценивать, насколько изменилась цена товара (в том числе для того, чтобы рассчитать изменение расходов, это особенно важно при планировании личного бюджета).

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

В ходе решения, анализа и обсуждения задач необходимо сформировать у учащихся следующие навыки:

1. умение сравнивать цены на товары и услуги при принятии решения о приобретении;
2. умение производить прикидку цен (не точный расчет, а средство первичной, быстрой оценки расходов снизу или сверху);
3. расчет и оценка скидок;
4. оценка изменения цены; пересчет цен, выраженных в других валютах.

Необходимые математические сведения

При решении задач этой темы школьники должны владеть навыками четырех арифметических действий, уметь выполнять действия с обыкновенными и десятичными дробями. Необходимо уметь находить часть от величины и величину по известной части, как в долях, так и в процентах. Умение строить и читать таблицы, графики линейных функций.

Термины, которые учащийся освоит в ходе решения задач

Розничная цена – цена единицы товара, продаваемого поштучно. Розничные цены используются в обычных магазинах.

Оптовая цена – цена единицы товара, продаваемого большими партиями. Как правило, оптовая цена ниже розничной.

Оптовый магазин – магазин, где товары продаются партиями (коробками, упаковками или не менее какого-либо количества единиц) по оптовой цене.

Скидка – уменьшение (снижение) установленной цены (обычно в процентах).

Примеры решения и обсуждения задач

1. Ежемесячная плата за стационарный телефон составляет 250 рублей в месяц. В следующем году планируется рост платы на 4%. Какой будет ежемесячная плата за телефон в следующем году?

Решение. $250 \cdot 1,04 = 260$ (рублей).

Ответ: 260.

Обсуждение. Разумеется, мы не знаем точно, какой будет рост платы за телефон. Тем более, в разных телефонных компаниях он разный. Цель состоит в том, чтобы, повторяя действия с процентами, научиться находить повышенную или пониженную цену одним действием умножения. Задачу, как и многие задачи сборника, лучше «переложить» на реальную почву: дать в качестве исходных данных действительную плату за квартирный телефон в вашем регионе; если доступны данные о грядущем изменении цены – использовать их. Допускается округление для облегчения расчетов. Главное – финансовые задачи, как и любые другие практико-ориентированные задачи, должны быть максимально близки к реальности.

2. В оптовом магазине мыло продается только упаковками. Упаковка мыла марки А стоит 438 рублей, а марки Б – 205 рублей 29 копеек. При этом в упаковке марки Б вдвое меньше кусков мыла, чем в упаковках марки А. Определите, мыло какой марки дешевле.

Решение. Две упаковки мыла марки Б будут стоить не более $206 \cdot 2 = 412$ рублей, что дешевле упаковки марки А.

Ответ: Мыло марки Б.

Обсуждение. Разумеется, задачу можно решить точно. В данном случае цель – продемонстрировать силу оценки (прикидки). Нам не важно, сколько в точности стоит кусок мыла. Цель – только понять, в каком случае приведенная цена (цена за единицу товара) ниже. В этой связи такую задачу нельзя использовать на контрольной работе, зато она будет очень уместна в ходе устного счета в начале урока или при изучении темы «Оценки и приближенные вычисления».

3*. В строительном магазине саморезы продаются только упаковками. Саморезы фирмы А продаются упаковками по 110 штук и стоят 240 рублей за упаковку, упаковка таких же по качеству саморезов фирмы Б содержит 100 штук и стоит 198,25 рублей.

а) Определите, один самореза какой марки стоит дешевле.

б) Определите, покупка саморезов какой марки обойдется дешевле, если требуется 105 штук.

Решение. а) Воспользуемся прикидкой. Если бы в упаковке фирмы А было 120 саморезов, 1 саморез стоил бы 2 рубля, а в действительности они стоят дороже. Саморезы фирмы Б стоят чуть меньше 2 рублей за штуку.

б) В упаковке марки А больше 105 саморезов, поэтому для удовлетворения потребности достаточно купить одну упаковку за 240 рублей. В магазине «Б» придется купить две упаковки за $198 \cdot 2 = 396$ рублей.

Ответ: а) Б; б) А.

Обсуждение. Такая задача в жизни возникает часто. Товары одного качества или даже одного производителя в разных местах продаются в разных упаковках, а иногда поштучно. Интересно обсудить ситуацию, когда более дорогой товар находится рядом, а такой же товар подешевле – в удаленном магазине или на рынке. Часто люди в погоне за небольшой выгодой тратят много времени и еще деньги на проезд и в результате проигрывают. Обратите внимание школьников на то, что каждый сам решает для себя, насколько существенна или несущественна разница в цене, исходя из собственного отношения к деньгам, обеспеченности и других соображений. Например, человеку могут потребоваться 105 саморезов для монтажа книжных полок. Казалось бы, нужно купить 110 штук за 240 рублей. Но покупатель может обоснованно рассуждать иначе: если я куплю две упаковки по 100 саморезов за 396 рублей, у меня останется 95 штук, которые я использую на даче летом.

4.** В строительном магазине А саморезы продаются упаковками по 110 штук и стоят 240 рублей за упаковку, в строительном магазине Б такие же саморезы продаются упаковками по 100 штук и стоят 198 рублей. Какое количество саморезов (штук) дешевле купить в магазине А?

Решение. Составим таблицу.

n	Количество саморезов в n пачках в магазине А	Стоимость n пачек в магазине А	Количество саморезов в n пачках в магазине Б	Стоимость n пачек в магазине Б
1	110	240	100	198
2	220	480	200	396
3	330	720	300	594
4	440	960	400	792
5	550	1200	500	990
6	660	1440	600	1188

Из таблицы видно: если саморезов нужно купить от 101 до 110, от 201 до 220, от 301 до 330 или от 401 до 440 штук, то в пересчете на одну штуку покупка обойдется дешевле в магазине А. При другом требуемом количестве дешевле выйдет покупка в магазине Б.

Ответ: от 101 до 110, от 201 до 220, от 301 до 330 или от 401 до 440.

Обсуждение. Задача практическая, хотя в постановке вопроса есть элемент искусственности. Обычно, принимая решение о покупке, мы знаем, сколько нам нужно саморезов. Интересная модификация получится из задачи, если спросить, начиная с какого количества саморезов их покупка будет неизменно выгоднее в магазине Б. Как мы знаем, ответ в этом случае – начиная с 441 самореза.

5. Для поездки в европейскую страну Петр купил 700 евро по курсу 76 рублей 50 копеек за евро. За время поездки он истратил 475 евро. Вернувшись в Россию, Петр решил обменять оставшиеся евро снова на рубли и смог это сделать по курсу 74 рубля 20 копеек за евро. Какую сумму в рублях выиграл или потерял на операциях обмена валюты Петр?

Решение. Петр дважды поменял $700 - 475 = 315$ евро. Курс покупки евро отличался от курса продажи на $76,5 - 74,2 = 2,3$ рубля. На двух обменах Петр потерял $315 \cdot 2,3 = 724,5$ рублей.

Ответ: 724 рубля 50 копеек.

Обсуждение. Подробный разговор об обменных курсах в другом разделе сборника, однако здесь можно задать школьникам вопрос: обязательно ли разница в обменных курсах связана с тем, что евро стал дешевле? Могло ли случиться так, что за время поездки Петра евро подорожал, но Петр все равно проиграл? Старшеклассники должны знать о том, что обменные курсы продажи и покупки валюты разные: банки продают валюту всегда немного дороже, чем покупают, и на этой разнице зарабатывают.

6*. На валютной бирже доллар США по отношению к рублю вначале вырос на 20%, а затем снизился на 20%, за этот же период евро по отношению к рублю сначала вырос на 10%, а затем снизился на 10%. Выросла или снизилась стоимость доллара США относительно евро за этот период? На сколько процентов?

Решение. Предположим, что x рублей – первоначальная цена доллара США, а y рублей – первоначальная цена евро.

Итоговое изменение цены доллара равно $x \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 0,96x$ (руб.). Итоговое изменение цены евро равно $y \cdot 1,1 \cdot 0,9 = 0,99y$ (руб.). Первоначальное отношение доллар/евро было $\frac{x}{y}$, а по-

сле всех колебаний оно стало $\frac{0,96x}{0,99y} = \frac{32}{33} \cdot \frac{x}{y}$, то есть доллар снизился относительно евро на

$1/33$ или примерно на 3%. Следует иметь в виду, что изменился не курс доллара к евро (о нем не говорится в условии), а именно отношение стоимости одной валюты к другой, стоимости, выраженной для обеих валют в рублях.

Ответ: снизился примерно на 3%.

7. Сырок стоит 17 рублей 50 копеек. Сырки продаются упаковками по 4 и 6 штук. Какое наибольшее количество сырков можно купить на 270 рублей?

Решение. Рассчитаем, сколько сырков можно купить на 270 рублей: $270 : 17,5 \approx 15,4$. На 16 сырков денег не хватит, а 15 сырков купить невозможно, поскольку в каждой упаковке число сырков четное. 14 сырков купить можно: две упаковки по четыре сырка и одну с шестью сырками.

Ответ: 14.

8*. Получив мешок сахара весом 50 кг, продавец Петрова на ночь поставила рядом с ним ведро воды. Благодаря гигроскопичности сахар постепенно впитывал влагу, и к утру мешок сахара стал весить 55 кг. При проверке выяснилось, что Петрова продала 22 кг мокрого сахара по установленной магазином цене 30 рублей за кг. За махинацию она была оштрафована в соответствии со статьей 14.7 Кодекса об административных правонарушениях на 3 000 рублей. Во сколько раз сумма штрафа превысила незаконный доход Петровой?

Решение. Вес мокрого сахара из мешка составляет 110% от веса сухого сахара. Следовательно, продав покупателям 22 кг мокрого сахара, Петрова продала 2 кг воды, то есть покупатели переплатили $2 \cdot 30 = 60$ рублей. Размер штрафа Петровой в 50 раз больше.

Ответ: 50.

Обсуждение. Такой способ обмана покупателей широко применялся раньше. Вероятно, с таким явлением можно еще встретиться в сельских магазинах, где сахар-песок до сих пор иногда продается на развес. Правда, нет никакой гарантии, что на фабриках при фасовке песок сухой – иногда в целлофановой упаковке можно обнаружить слипшиеся комки. Таким образом, метод «не потерял актуальности». Побочный эффект решения таких задач – бытовой: школьники понимают, что при покупке сахар стоит его «пощупать». Слипшийся и комковатый сахар должен наводить на мысль об обмане.

9*. Ольга и Михаил ждут в гости родственников, всего за ужином соберется семь человек. Ольга планирует накормить гостей голубцами.

Для приготовления 2 порций голубцов (порция рассчитана на одного человека) нужно 500 г мясного фарша, 400 г капусты, 50 г моркови, 50 г лука, 100 г помидоров, 1/3 стакана риса, соль, приправы, растительное масло. В стакане помещается 180 г риса. Масло, соль и приправы у Ольги есть. Остальное можно купить в супермаркете. Продукты там продаются упаковками или поштучно, фарш – на развес.

	Продукт	Минимальная покупка	Вес минимальной партии, кг	Цена, руб. за кг
1.	Мясной фарш	Нет ограничения	-	340
2.	Капуста	Штука (кочан)	Не менее 1,5	24
3.	Морковь	Штука	Не менее 0,12	30
4.	Лук	Упаковка	1,0	45
5.	Помидоры	Штука	Не менее 0,1	95
6.	Рис	Упаковка	1,0	98

В том же супермаркете можно купить готовые голубцы по цене 145 рублей за такую же по весу порцию. Определите, какие голубцы обойдутся дешевле: домашние или готовые?

Решение. Рассчитаем, сколько требуется продуктов на 7 порций: 1,75 кг фарша, 1,4 кг капусты, 0,175 кг моркови, 0,175 кг лука, 0,35 кг помидоров, 0,21 кг риса. Поскольку все продукты, кроме фарша, продаются упаковками или штуками, общая стоимость покупки будет не менее

$340 * 1,75 + 24 * 1,5 + 30 * 0,175 + 45 + 95 * 0,35 + 98 = 812,5$ рублей.

Покупные голубцы обойдутся в $145 \cdot 7 = 1015$ рублей, то есть дороже домашних.

Ответ: домашние.

Обсуждение. Разумеется, в жизни мы так тщательно не рассчитываем вес и цену продуктов. Можно было в некоторых случаях сделать грубые прикидки. Кроме того, в пользу домашних голубцов говорят еще два фактора: во-первых, они, как правило, вкуснее и свежее, и, во-вторых, после их приготовления останутся неиспользованные продукты (во всяком случае рис и лук), которые можно будет использовать позже. В пользу покупных голубцов только одно соображение – это быстрее. И, заметьте, этот фактор окажется решающим, если по какой-то причине у Ольги нет времени на готовку. Это типичное обсуждение, характерное для всех задач на выбор одной альтернативы из нескольких.

10*. Хозяин договорился с рабочими, что они выкопают ему колодец на следующих условиях: за первый метр он заплатит им 3500 рублей, а за каждый следующий метр — на 1600 рублей больше, чем за предыдущий. Какую сумму хозяин должен будет заплатить рабочим, если они выкопают колодец глубиной 9 метров?

Решение. Стоимость работы можно вычислить с помощью формулы суммы арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

где S_n – стоимость колодца глубиной n метров, a_1 – стоимость первого метра, d – прирост стоимости каждого следующего метра. Подставляем данные:

$$S_9 = \frac{7000 + 1600 \cdot 8}{2} \cdot 9 = 89100.$$

Ответ: 89 100 рублей.

Обсуждение. Условие задачи подталкивает к использованию формулы суммы арифметической прогрессии, но школьники могут справедливо усомниться в том, что на практике применяется именно такой расчет. В реальности фирмы, занимающиеся рытьем колодцев, обычно тарифицируют свои услуги иначе. Например, до 5 метров – одна стоимость метра, от 4 до 10 метров – другая цена, от 10 метров и глубже – третья. Здесь учитель может дать более реалистичное условие, тем самым несколько усложнив или упростив задачу.

1.2. Взаимозаменяемые варианты

Почему важно уметь решать такие задачи

Разумный потребительский выбор состоит в том, чтобы получить наибольшую пользу (в субъективном понимании конкретного человека) за наименьшую цену. При этом в расчет необходимо принимать не только цену товара или услуги как таковую, но и другие расходы или выгоды, которые могут возникнуть в процессе их покупки и потребления.

Как правило (хотя и не всегда!), самые привлекательные варианты связаны с различными ограничениями и условиями, которые могут повлечь за собой дополнительные расходы.

Наиболее правильная тактика в таких случаях – сравнивать варианты, принимая во внимание цену, возможные дополнительные расходы или выгоды, а также ограничения и риски, связанные с каждым вариантом.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

При решении и разборе подобных задач необходимо тренировать навык аккуратного расчета, учитывающего параметры и ограничения. Нередко при выборе правильного ответа (как и в реальной жизни) приходится отсеивать наиболее привлекательные варианты, поскольку они не удовлетворяют какому-то ограничению.

Сложности также могут возникнуть и при определении полной стоимости того или иного варианта. Отвечая на вопрос «Что выгоднее?», школьники должны понимать, что они не могут ограничиться сравнением заявленных цен товаров и услуг, а должны выявить из условия все расходы или выгоды, связанные с выбором того или иного варианта.

Необходимые сведения из курса математики

Помимо вычислительных навыков, владения техникой работы с дробями, долями и процентами, здесь от учащихся требуется умение прикидывать приближенные значения и выполнять сравнение величин на основе прикидки. Нужно также умение организовывать перебор небольшого числа вариантов, анализировать данные, представленные в таблице, внимательно читать условие, выделять существенные и несущественные факторы.

Термины, которые учащийся освоит в ходе решения задач

Невозвратный авиабилет – билет на авиаперелет, который нельзя вернуть при вынужденной отмене или переносе поездки.

Льготный абонемент (билет) – проездной документ, продаваемый со скидкой определенным группам населения или при выполнении других специальных условий.

Тариф, или тарифный план – размер платы (цена) за услугу и условия ее приобретения.

Абонентская плата – обязательная фиксированная плата за пользование услугой в течение определенного периода времени, чаще всего – месяца. Широко применяется операторами связи, интернет-провайдерами.

Рассрочка – выплата цены товара частями на протяжении оговоренного времени.

Однотарифный (одноставочный) электрический счетчик – прибор учета, который кругло-суточно суммирует потребленную электроэнергию.

Многотарифный электросчетчик – прибор, который раздельно считает (суммирует) потребление электроэнергии в разное время суток, когда электроэнергия стоит по-разному.

Окупаемость – это возможность вернуть финансовые средства, потраченные на создание чего-либо, приносящего доход или позволяющего уменьшить расходы. Например, энергосберегающие лампы потребляют меньше электроэнергии, чем лампы накаливания, а значит, их покупка и установка в квартире позволит сократить ежемесячные платежи за электроэнергию. Определив, на сколько уменьшатся ежемесячные расходы, можно сравнить эту сумму со стоимостью ламп и посчитать, за какой срок можно вернуть деньги, потраченные на лампы (или, иначе: за

какой срок окупятся расходы на лампы). Это время (измеряемое обычно в месяцах или годах) называют сроком окупаемости.

Примеры решения и обсуждения задач

11. Билет на одну поездку стоит 20 рублей, проездной на месяц, позволяющий сделать неограниченное количество поездок, – 580 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 41 поездку. На сколько больше она бы потратила, если бы каждый раз покупала билеты на одну поездку?

Решение. $41 \cdot 20 - 580 = 240$ рублей.

Ответ: 240.

12*.

Семья Пермяковых из Перми планирует летом поездку к родственникам в Новороссийск. В семье маленький ребенок, поэтому они хотят лететь самолетом, потратив на дорогу «от двери до двери» не более 12 часов. Ближайшие к Новороссийску аэропорты – Геленджик (35 км) и Анапа (65 км). Ближайшие к дому Пермяковых аэропорты – Большое Савино в Перми (20 км от дома) и Кольцово в Екатеринбурге (380 км). Все наземные передвижения совершаются на такси со средней скоростью 60 км/ч по тарифу 17 рублей за километр. Пермяковы рассматривают следующие варианты перелета.

Маршрут	Цена билетов на семью, руб.	Общее время полета, час.	Длительность пересадки, час.
Пермь–Геленджик (через Москву)	32 000	6,5	4,5
Пермь–Анапа (через Москву)	34 000	4,5	1,5
Екатеринбург–Геленджик (прямой)	30 000	3,5	0

На регистрацию, посадку на первый рейс и получение багажа в аэропорту прибытия потребуется еще 1,5 часа.

Какой из вариантов следует выбрать Пермяковым, чтобы уложиться в установленные ограничения по времени и при этом потратить на дорогу наименьшую возможную сумму денег?

Решение. Маршрут Пермь–Москва–Геленджик занимает

$$6,5 + 4,5 + 1,5 + \frac{35+20}{60} > 12 \text{ часов.}$$

Значит, этот вариант не нужно дальше рассматривать.

Маршрут Екатеринбург–Геленджик занимает

$$3,5 + 1,5 + \frac{380+35}{60} < 5 + 7 = 12 \text{ часов}$$

и стоит $30\,000 + (380 + 35) \cdot 17 = 37\,055$ рублей.

Маршрут Пермь–Москва–Анапа занимает

$$4,5 + 1,5 + 1,5 + \frac{65+20}{60} < 7,5 + 1,5 = 9 \text{ часов}$$

и стоит $34\,000 + (65 + 20) \cdot 17 = 35\,445$ рублей.

Ответ: Пермь–Анапа.

Обсуждение. Эта задача, наряду со многими другими, требует внимательного чтения большого объема текста и сравнения данных, представленных в таблице и в тексте. Другая особенность – при оценке времени не требуется точный подсчет. Нужно лишь сравнить результат с 12 часами. На это следует обратить внимание школьников.

13*. Семья Макаровых живёт в старом доме, среднемесячное потребление электроэнергии составляет 180 кВт*ч, из которых 120 кВт*ч потребляются в промежутке с 7:00 до 23:00. Семья

платит за электроэнергию по одноставочному (не зависящему от времени суток) тарифу составляют 5,38 рублей за кВт*ч. Макаровы рассматривают возможность перехода на двухставочный тариф. В этом случае им придется за 4 550 рублей установить в квартире многотарифный счетчик, который будет отдельно учитывать энергию, потребленную в ночные (с 23:00 до 7:00) и дневные часы (с 7:00 до 23:00). При этом дневное потребление они будут оплачивать по ставке 6,19 рублей за кВт*ч, а ночное – по 1,64 рублей за кВт*ч. За сколько месяцев окупятся расходы на установку счетчика при неизменных объеме и структуре потребления электроэнергии?

Решение. При одноставочном тарифе ежемесячные расходы на оплату электроэнергии составляют $180 * 5,38 = 968,4$ рублей. При двухставочном тарифе ежемесячные расходы составят

$$120 * 6,19 + 60 * 1,64 = 742,8 + 98,4 = 841,2 \text{ рублей.}$$

Экономия на текущих платежах составит 127,2 рублей в месяц, расходы на установку счетчика окупятся за $\frac{4500}{127,2} = 35,37$ месяцев. Округляя вверх, получаем 36 месяцев.

Ответ: 36 месяцев.

Обсуждение. Снова задача, где числовые данные следует корректировать в зависимости от текущего уровня цен. Заметим, что в 2016 году в ЕГЭ по математике встретилась задача на оплату электроэнергии по простому тарифу. Результаты выполнения этой задачи оказались печальными – общезначимое и важное умение – посчитать плату за домашнее электропотребление оказалось не по плечу более чем 25% выпускников. Это говорит о том, что житейским задачам на расчет платы за услуги ЖКХ следует уделять серьезное внимание.

14. Семья Ивановых выращивает на даче картошку, и в этом году урожай составил 200 кг. За сезон Ивановы потратили 1600 рублей на семенной картофель, 4000 рублей стоил бензин для поездок на дачу, чтобы посадить, обработать, собрать и вывезти картошку. На удобрения и защиту растений было потрачено еще 1200 рублей. Что дешевле: выращивать картошку, как и прежде, самим или покупать на рынке по 28 рублей за килограмм?

Решение. Полная стоимость урожая картошки у Ивановых составила

$$1600 + 1200 + 4000 = 6800 \text{ рублей.}$$

Цена 200 кг картошки на рынке $28 * 200 = 5600$ рублей.

Ответ: покупать на рынке дешевле.

Обсуждение. Кто-то из школьников заметит, что Ивановы наверняка и так ездили бы на дачу и поэтому все равно потратили бы 4000 рублей на бензин. И если вычесть эти деньги из затрат, получится что выращивать картошку намного дешевле, чем покупать на рынке. Другой школьник может заметить, что, если бы не картошка, Ивановы не ездили бы на дачу так часто осенью, а просто провели бы там лето. Таким образом, задача имеет вовсе не однозначное толкование и не однозначное решение. Во всяком случае, следует договориться о том, что при любом подходе мы рассматриваем только финансовую составляющую вопроса и сразу отставляем в сторону соображения вроде того, что Ивановым просто нравится выращивать картошку.

1.3. Альтернативная стоимость

Почему важно уметь решать такие задачи

Принятие любого решения – это выбор. В полной мере это относится и к финансовым решениям: мы выбираем, потратить деньги или сберечь, купить один товар или другой, отказаться от покупки при нехватке денег или все же купить, взяв денег взаймы.

Речь может идти не только о деньгах. Мы также выбираем, как распорядиться своим временем и силами (поработать или отдохнуть, сделать самому или купить готовое). Такие решения тоже являются финансовыми, поскольку они влияют на состояние нашего кошелька.

Выбирать нам приходится потому, что наши желания и потребности безграничны, а возможности ограничены. Именно поэтому любую покупку можно оценить не только в деньгах, кото-

рые за нее пришлось уплатить, но и в ценности блага, от которого нам при этом пришлось отказаться.

Например, если вы нашли подработку на лето, где вам готовы платить по 500 рублей в день, а друзья зовут вас в поход на 10 дней, то к прямым затратам на поход добавляется доход, который вы не заработали за эти дни. Таким образом, 5000 рублей – альтернативная стоимость решения пойти в поход.

Оценивая потребительское или финансовое решение через неполученный доход или благо, мы говорим об альтернативной стоимости такого решения. «Бесплатных» решений не бывает, иначе говоря, альтернативная стоимость есть у любого решения, но оценивает ее каждый человек по-разному.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

При решении и обсуждении задач нужно делать акцент на сравнительном анализе альтернативных вариантов потребительского и финансового поведения. Приобретение навыка анализа альтернатив очень важно, и мы будем к нему возвращаться при рассмотрении многих других сюжетов и задач.

В общем виде подобный анализ предполагает выполнение следующих шагов.

1. Формулировка вариантов решения.
2. Выработка критериев оценки вариантов.
3. Оценка вариантов на основании этих критериев.
4. Ранжирование вариантов по результатам оценки.
5. Выбор варианта с наилучшей оценкой.

Такой алгоритм с использованием многих критериев иногда позволяет сравнивать неоднородные варианты. Для лучшего понимания учащимися можно начинать анализ альтернатив с простых примеров выбора между разными марками потребительских товаров, в котором проводится оценка только по одному критерию – цене. Затем можно рассмотреть более жизненные примеры выбора, при котором учитывается не только цена, но и другие объективные критерии (функциональность, долговечность и пр.) Впоследствии можно усложнять рассматриваемые примеры, более активно используя идею альтернативной стоимости, могут быть добавлены субъективные критерии (внешний вид, привлекательность).

Необходимые сведения из курса математики

Для решения данных задач учащемуся потребуются следующие математические навыки и знания: умение организовывать перебор вариантов, умение пользоваться процентами, долями и дробями, пользоваться свойствами арифметической и геометрической прогрессий. Требуется умение находить среднее арифметическое величин и пользоваться простейшими его свойствами. Необходимо умение переводить одни единицы измерения в другие.

Термины, которые учащийся освоит

Альтернативная стоимость решения – это стоимость блага или товара, от которого отказывается человек, выбирая некий другой вариант.

Примеры решения и обсуждения задач

15*. Иван Петрович хочет выровнять стены и переклеить обои в комнате. Он может нанять мастеров и заплатить им за всю работу 50 000 рублей, а может все сделать сам (при сопоставимом качестве ремонта), заплатив только 30 000 рублей за материалы. Иван Петрович должен выполнить ремонт как можно скорее, без перерывов. Выходные у него только в субботу и воскресенье, а с понедельника по пятницу он работает, зарабатывая 2250 рублей в день. Для выполнения ремонта своими силами ему придется взять отпуск без сохранения заработка. При какой максимальной продолжительности ремонта (в календарных днях) Ивану Петровичу дешевле сделать ремонт самому, чем нанимать мастеров?

Решение. Ивану Петровичу выгодно заниматься ремонтом самостоятельно в том случае, если сумма, которую он не получит за время отпуска без сохранения заработка, не превысит стоимо-

сти услуг мастеров. Посчитаем, за сколько рабочих дней Иван Петрович зарабатывает сумму, равную стоимости услуг сторонних работников:

$$(50\,000 - 30\,000) / 2250 = 8,89 \text{ рабочих дней.}$$

Если ремонт длится девять рабочих дней, то уже выгоднее нанять мастеров, а если восемь рабочих дней – то еще выгоднее делать ремонт самостоятельно. Так как ремонт нужно делать без перерывов, к рабочим дням Иван Петрович может прибавить еще выходные. При восьми рабочих днях прибавить получится максимум четыре выходных дня. Таким образом, Ивану Петровичу выгоднее сделать ремонт своими силами, чем нанимать мастеров, если его продолжительность не превысит 12 календарных дней.

Ответ: 12.

Обсуждение. Эта задача чем-то похожа на задачу 13, в которой также обсуждалась, по сути дела, альтернативная стоимость выращивания картошки на дачном участке, а альтернативой выступала покупка картошки на рынке. Здесь альтернатива устроена хитрее: если Иван Петрович покупает труд рабочих, то он не покупает свое собственное рабочее время. Именно неполученная цена собственного труда в данном случае выступает альтернативой. Это интересное обсуждение со школьниками – альтернативная стоимость может быть не только уплаченной за что-то, но и упущенным доходом.

1.4. Комплементарные (взаимодополняющие) блага

Почему важно уметь решать такие задачи

Часто расходы на пользование товаром не ограничиваются его ценой. Чтобы пользоваться компьютером, нужно дополнительно оплачивать интернет, а чтобы спать на кровати, требуется еще и матрас, который часто продается отдельно. Для использования многих товаров необходимы расходные материалы (для принтера – картриджи и бумага, для дрели – сверла, для автомобиля – страховой полис, топливо, запчасти и т.д.). Наконец, пользование многими вещами гораздо удобнее при наличии специальных аксессуаров (мобильный телефон – чехол, фотоаппарат – штатив, светофильтры и пр.), а стоимость аксессуара у разных производителей может различаться существенно, и часто эти аксессуары нельзя применить для аналогичных изделий других моделей.

Аксессуары, расходные материалы или сопутствующие услуги приобретаются вместе с товаром или отдельно. Все это – примеры **комплементарных**, или **дополняющих**, **благ**. Чтобы реально оценить стоимость товара с учетом всех дополнительных расходов, нужно представлять себе, какие товары, материалы и услуги его дополняют и, если они не продаются «в комплекте», посчитать или хотя бы оценить предстоящие совокупные расходы на приобретение всех необходимых компонентов.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

При решении и разборе подобных задач нужно обратить внимание учащихся на то, что потребительский выбор должен учитывать не только цену приобретения товара, но и сопутствующие расходы, связанные с его использованием.

Желательно потренировать навык расчета полной стоимости владения различными потребительскими благами (мобильный телефон, автомобиль, загородный дом и пр.). Нужно продемонстрировать на примерах распространенную ситуацию, когда человек имеет достаточно средств для покупки товара, но не может позволить себе расходы, связанные с использованием; и ситуацию, когда более дешевое предложение с учетом полной стоимости оказывается более дорогим по цене, чем альтернативный вариант.

Необходимые сведения из курса математики

Для решения данных задач учащемуся потребуются следующие математические навыки и знания: работа с процентами, долями и дробями (нахождение части от целого и целого по его час-

ти, сложные проценты), определения и свойства арифметической прогрессии, средние величины и их свойства, перевод из одних единиц в другие.

Термины, которые учащийся освоит

Комплементарные блага – дополнительные товары или услуги, которые необходимо или желательно приобрести при покупке определенного товара.

Полная стоимость владения – стоимость товара или блага плюс все последующие обязательные или желательные затраты на его содержание за все время владения.

Примеры решения и обсуждения задач

16*. Небольшой фирме требуется принтер для черно-белой печати, на котором планируется напечатать не менее 15 000 страниц. По техническим характеристикам подходят два варианта: лазерный принтер за 14 000 рублей и струйный принтер за 5000 рублей. При этом картридж к лазерному принтеру стоит 6000 рублей, и его хватает примерно на 1600 страниц. Картридж к струйному принтеру стоит 2000 рублей, его хватает примерно на 400 страниц. Какой принтер выгоднее купить, лазерный или струйный? (Покупка тем выгоднее, чем ниже полная стоимость владения принтером.)

Решение: Для печати 15 000 страниц на лазерном принтере потребуется купить еще девять картриджей. Если купить струйный принтер, потребуется еще 37 картриджей. Совокупные расходы на использование лазерного принтера составят

$$14000 + 9 \cdot 6000 = 68000 \text{ рублей,}$$

а струйного –

$$5000 + 2000 \cdot 37 = 79000 \text{ рублей.}$$

Ответ: лазерный принтер выгоднее.

Обсуждение. Такая ситуация встречается слишком часто, к сожалению, она типична для государственных и муниципальных учреждений, где руководители не учитывают стоимость расходных материалов. В школах в последнее время установлены маркерные доски, но очень часто нет фломастеров к ним, которые гораздо дороже обычного мела. Здесь мы впервые говорим не о цене, а о полной стоимости блага, включающей дополнительные расходы на содержание и обслуживание.

17*. Алексей выбирает принтер для учебы в институте. Он предполагает, что за время учебы ему потребуется напечатать не менее 15 000 страниц. В продаже есть принтеры трех марок А, Б и В.

Марка принтера	Цена принтера, руб.	Цена картриджа, руб.	Ресурс печати картриджа, стр.
А	8000	1000	1800
Б	11 000	700	2000
В	10 200	800	1500

а) Принтер какой марки следует приобрести Алексею, если он хочет выбрать наиболее экономный вариант, то есть принтер с наименьшей полной стоимостью?

б) Продавец предлагает Алексею за 300 рублей дисконтную карту, которая дает скидку 15% на дальнейшие покупки товаров марки А, в частности картриджей. Изменится ли ответ на первый вопрос, если Алексей примет предложение и купит дисконтную карту? Если да, то каким образом?

Решение. а) Для печати 15 000 страниц на принтере марки А Алексею понадобится 8 дополнительных картриджей, на принтере марки Б – 7 картриджей и 9 картриджей, если куплен принтер марки В.

Полная стоимость печати на принтере марки А равна

$$8000 + 8 \cdot 1000 = 16000 \text{ рублей,}$$

на принтере марки Б –

$$11000 + 7 \cdot 700 = 15900 \text{ рублей,}$$

на принтере марки В –

$$10200 + 9 \cdot 800 = 17400 \text{ рублей.}$$

б) Дисконтная карта позволит сократить расходы на покупку картриджей к принтеру А на $8 \cdot 0,15 \cdot 1000 = 1200$ рублей. Выигрыш от приобретения карты составит $1200 - 300 = 900$ рублей. На эту величину сократится полная стоимость печати на принтере А. Теперь она составит 15100 рублей.

Ответ: а) Б; б) Да, станет выгоднее купить принтер А (или: А – принтер с наименьшей полной стоимостью).

Обсуждение. Задача должна показать учащимся, что, помимо стоимости обслуживания и содержания товара в дальнейшем, иногда появляются дополнительные факторы, которые могут привести к изменению решения. За рамками задачи остается сравнение свойств этих принтеров, предполагается, что все они печатают одинаково хорошо и одинаково хорошо совместимы с компьютером Алексея.

Хрестоматийный пример ситуации, в которой важна оценка полной стоимости товара, – владение автомобилем. Рассмотрим следующую задачу.

18. Алексей планирует купить автомобиль, чтобы пользоваться им 10 лет и за это время проехать на нем 150 000 км. Алексей рассматривает две модели разных марок со следующими характеристиками:

Марка автомобиля	A1	A2
Стоимость	500 000 руб.	450 000 руб.
Стоимость периодического технического обслуживания (ТО)	20 000 руб. через каждые 15 000 км пробега автомобиля	15 000 руб. через каждые 10 000 км пробега автомобиля
Используемый бензин и его стоимость	А-95 по 38 руб. за литр	А-95 по 38 руб. за литр
Расход топлива на 100 км	7 л	8 л

Автомобиль какой марки стоит купить Алексею, если он хочет потратить на это приобретение как можно меньше денег? Остаточную стоимость автомобилей (стоимость по окончании срока использования, по которой автомобиль можно продать) учитывать не нужно.

Решение. С учетом техобслуживания и топлива автомобиль марки А1 обойдется Алексею в

$$500000 + 20000 \cdot \frac{150000}{15000} + \frac{150000}{100} \cdot 7 \cdot 38 = 1\,099\,000 \text{ рублей,}$$

а марки «А2» –

$$450000 + \frac{150000}{10000} \cdot 15000 + \frac{150000}{100} \cdot 8 \cdot 38 = 1\,131\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ: А1.

Обсуждение. Здесь вся задача – сплошная прикидка. Школьникам следует задать вопрос о том, какие существенные факторы мы не приняли во внимание. Во-первых, страхование автомобиля (учитывается в других задачах сборника), во-вторых – у нас отсутствуют данные о планируе-

мых расходах на ремонт в случае поломок. Нет данных даже о сроках гарантии этих машин. Кстати, оценки всех этих величин можно найти в интернете на популярных автомобильных сайтах. Кроме того, сведения о расходе бензина ориентировочные; в реальности расход определяется стилем вождения. И, наконец, мы не уверены в том, что цены на бензин и на техническое обслуживание сохранятся. Чем выше цены на топливо и техобслуживание, тем более привлекательным будет становиться автомобиль А1. Обратите внимание школьников на то, что в обоих случаях цена автомобиля составляет менее половины полной стоимости. Можно предложить учащимся самим составить модификацию этой задачи с учетом большего количества факторов. Такую работу разумно предложить в качестве домашней, к выполнению которой учащиеся могут привлечь своих родителей, если в семье есть автомобиль.

При этом учитель должен понимать, что и в этой задаче (как в задаче про выращивание картошки) не учитывается важнейший фактор «нравится – не нравится». Вероятно, Алексей планирует приобретение рабочего автомобиля: например, такси или фургончика для доставки грузов. К приобретению домашнего любимого автомобиля люди редко подходят столь утилитарно.

Модификация этой задачи – про аренду автомобиля, которая приобретает в нашей стране все большую популярность.

19. Алексей хочет взять в аренду на 7 дней небольшой внедорожник для поездки в горы и выбирает из двух вариантов:

Автомобиль	Внедорожник А	Внедорожник В
Стоимость аренды (включая обязательное страхование на срок аренды)	4000 руб. в сутки	5100 руб. в сутки
Предполагаемый расход бензина на 100 км пути	10 л	9 л
Используемый бензин и его стоимость	АИ-95 по 40 руб. за литр	АИ-95 по 40 руб. за литр

За время аренды Алексей планирует проехать 3 500 км и хочет выбрать автомобиль с минимальной полной стоимостью аренды. Автомобиль какой марки ему следует арендовать в таком случае?

Решение. За аренду автомобиля и бензин Алексей суммарно заплатит в случае аренды автомобиля А:

$$4000 \cdot 7 + 35 \cdot 10 \cdot 40 = 42000 \text{ рублей,}$$

а при аренде автомобиля В:

$$5100 \cdot 7 + 35 \cdot 9 \cdot 40 = 48300 \text{ рублей.}$$

Ответ: Марки А.

1.5. Скидки, уценки, программы лояльности

Почему важно уметь решать такие задачи

Оказавшись в нужное время в нужном месте, можно купить понравившуюся вещь дешевле, сэкономив деньги для других покупок. В то же время объявление о распродаже и скидках не может служить однозначным сигналом к покупке: полезно посчитать, в какую сумму на самом деле обойдется покупка, и оценить, насколько она выгоднее других вариантов (например, покупки в другом магазине).

Нужно помнить, что продавец (магазин) дает скидку не потому, что хочет сделать вам приятный подарок, а поскольку считает это выгодным для себя. С помощью скидки продавец стремится ускорить ваше решение о покупке (например, ограничивая сроки распродажи) или просто продать больше товара, привлечь новых покупателей, сформировать привычку покупать у данного конкретного продавца (используя различные программы лояльности: карты постоянного покупателя, скидки на следующую покупку и т. п.).

Проще всего оценить выгоду, когда продавец предлагает купить его товар со скидкой, прямо объявляя ее размер в процентах («Цены снижены на 20%!»). В этом случае легко определить новую цену и посчитать выигрыш от скидки в абсолютном выражении. При этом полезно сравнить сниженную цену с ценами на такой же товар в других магазинах. Может оказаться, что там цены без скидок ниже, чем цена продавца (магазина), проводящего распродажу, и тогда никакого смысла в покупке со скидкой нет.

Нередко предложение скидки сформулировано более сложно либо обставлено рядом условий. Например, продавец может установить правила распродажи, при которых, покупая один или несколько товаров, покупатель может получить еще один товар бесплатно или купить его по сниженной цене.

Если скидка предоставляется на одинаковые товары, для определения выгоды достаточно вычислить цену одной единицы. Для этого нужно общую стоимость покупки поделить на общее количество купленных товаров (включая «бесплатные» товары или товары со скидкой). Полученную цену единицы товара нужно сравнить с ценами в других магазинах. Если она действительно ниже, тогда покупка выгодна. Разумеется, при этом нужно оценивать, действительно ли вам нужно такое количество товаров. Если нужна одна пара обуви, покупать три пары только потому, что на них предлагают скидку, неразумно.

Наконец, под скидкой может прятаться снижение цены (уценка) товара, который не пользуется спросом или теряет свои потребительские качества. Например, продукты питания могут продаваться с большой скидкой перед истечением срока годности. Нужно хорошо подумать, выгодна ли покупка, если часть придется выбросить.

Какие и финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

При решении и разборе задач следует обращать внимание на базовый принцип грамотного экономического и финансового поведения: **анализ альтернатив**.

Принимая решение о покупке, особенно если речь идет о значительной сумме, нужно тщательно рассмотреть возможные варианты (что покупать, где покупать, какие параметры следует принимать во внимание помимо цены). Не нужно спешить, реагируя на слова продавца о том, что это ваш последний шанс, осталось мало времени или товара. Вполне может оказаться, что в другом месте этот товар дешевле, или что существует аналогичный товар с лучшими характеристиками, или же что низкая цена не включает многих важных составляющих (доставку, установку, обслуживание и пр. – см. раздел 1.4 о комплементарных благах).

Целесообразно предложить учащимся порешать задачи на сравнение условий продажи у разных продавцов, определение полной стоимости единицы товара (с учетом скидок и дополнительных расходов при покупке), поиск суммарной величины выигрыша от скидок и ее сопоставления с дополнительными затратами, которые требуется понести для получения скидки.

Важно научить приводить варианты к сопоставимым условиям, исключать факторы, не имеющие отношения к делу (которыми часто наполнены предложения о скидках).

Необходимые сведения из курса математики

Для решения данных задач учащемуся потребуются в основном следующие навыки: работа с процентами, долями и дробями; прямой перебор вариантов; умение составлять по условию и решать линейные уравнения.

Термины, которые учащийся освоит

Программа лояльности – предложение скидок или дополнительных благ постоянным покупателям (клиентам). Учет таких покупателей, их покупок и предоставленных благ, как правило, ведется с помощью клиентских карт.

Примеры решения и обсуждения задач

20. Розничная цена учебника 180 рублей, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее количество таких учебников можно купить по оптовой цене на 10 000 рублей?

Решение. Оптовая цена учебника $180 : 1,2 = 150$ рублей. Количество учебников $10000 : 150 = 66\frac{2}{3}$ Округляем вниз до целого.

Ответ: 66.

21*. Сеть магазинов электроники и бытовой техники предлагает бонусную программу для покупателей. В соответствии с условиями программы за каждый потраченный рубль начисляется один бонус. После того как покупатель накопит 15 000 бонусов, он получает 500 бонусных рублей, которые можно использовать при следующей покупке. Николай накопил 500 бонусных рублей при покупке телевизора стоимостью 15 000 рублей и потратил их при покупке видеоплеера стоимостью 2000 рублей. По условиям бонусной программы при покупке за бонусные рубли дополнительные бонусы не начисляются. Сколько процентов составила итоговая скидка, полученная Николаем? Ответ округлите до десятых долей процента.

Решение. Хотя скидка используется при следующей покупке, в действительности она начисляется на ранее совершенные покупки. Общая стоимость покупок (той, за которую начислены бонусы, и той, на которую сделана скидка) 17 000 рублей. Скидка в 500 рублей составляет 2,9 % от потраченной суммы.

Ответ: 2,9%.

Обсуждение. Раньше мы обсуждали полную стоимость покупки. Точно так же следует обсудить полную скидку или уценку. В этой задаче приводится пример «честной скидки», которая измеряется в рублях. Тем не менее будут школьники, которые скажут, что скидка составляет 3,3% – ведь на каждые 30 рублей, заплаченных в кассе, магазин скидывает 1 рубль. В реальности, как мы видим, дело обстоит иначе.

22. Шоколадка стоит 35 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает третью шоколадку в подарок. Какое наибольшее количество шоколадок можно получить в воскресенье, потратив не более 200 рублей?

Решение. Без специальных предложений на 200 рублей можно купить 5 шоколадок: $200 : 35 \approx 5,7$. Бесплатно можно получить шоколадку за каждые две. То есть будет еще 2 бесплатные шоколадки.

Ответ: 7.

Обсуждение. Подобные предложения встречаются очень часто. Особенно – на товары не первой необходимости: парфюмерию, не самые важные продукты питания. Нередко оказывается, что в соседнем магазине цена на этот же товар настолько ниже, что дешевле купить там без

всяких специальных условий. Кроме того, увидев заманчивые предложения, человек часто поддается, не задавая себе вопрос: а нужны ли мне две шоколадки?

23*. Ровно через год после поступления холодильника в продажу магазин снижает его цену на определенное количество процентов. Еще через год цена снова снижается на такое же количество процентов относительно предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена, если холодильник, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рубля.

Решение. Запишем уравнение $20000 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 15842$, где x – ежегодная уценка в процентах. Решая уравнение, получаем $x = 11$.

Ответ: 11%.

Обсуждение. Если зайти на какой-нибудь интернет-агрегатор продаж (например, Яндекс-маркет), можно увидеть подробный отчет об изменении средней цены любого товара с момента появления его в продаже. Особенно велико падение цен у мобильных телефонов, компьютеров и другой техники, которая быстро совершенствуется. Расчет, сделанный в этой задаче, позволяет прикинуть скорость уценки. Уценка около 10% для сложной бытовой техники – обычная для стабильной ценовой ситуации. Если же наблюдается обесценивание денег, то все цены растут. В этом случае можно увидеть, что на ряд товаров цены растут медленнее, чем на товары повседневного спроса.

24*. Магазин «Близко» предлагает скидку 50 рублей на каждые 1000 потраченных рублей. Известно, что все товары, продающиеся в торговой сети «Близко» дороже на 3%, чем такие же товары в гипермаркете неподалеку. Может ли покупка в торговой сети «Близко» обойтись дешевле, чем в гипермаркете, если ее сумма без скидки составляет: а) 1200 рублей; б) 1900 рублей; в) 2 100 рублей?

Решение. а) Найдем полную стоимость покупок с учетом скидки в магазине «Близко». В «Близко» $1200 - 50 = 1150$ рублей; в гипермаркете $\frac{1200}{1,03} = 1165,05$ рубля (с округлением до сотых).

б) В «Близко» $1900 - 50 = 1850$ рублей; в гипермаркете: $\frac{1900}{1,03} = 1844,66$ рубля.

в) В «Близко» можно воспользоваться 2 скидками по 50 рублей: $2100 - 100 = 2000$ рублей; в гипермаркете $\frac{2100}{1,03} = 2038,84$ рубля.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

Обсуждение. На первый взгляд, описанная в условии ситуация искусственная. На самом деле хозяйки, постоянно покупающие одни и те же продукты, часто прикидывают, в какой магазин пойти. На основе опыта они знают, что дешевле купить там, а что – здесь. Решение этой задачи в каком-то смысле объясняет поведение таких хозяек, формализуя их интуитивное представление о том, где покупка будет выгоднее сегодня, а где завтра.

Тема 2. Доходы и налоги

Почему важно уметь решать такие задачи

В задачнике рассматриваются два основных вида доходов – работа по найму и ведение своего дела (предпринимательская деятельность).

Доход предпринимателя, как правило, связан с денежными расходами – чтобы что-то продать, нужно что-то купить или сделать самому. Кроме того, предприниматель также должен выпла-

чивать заработную плату работникам, вносить арендную плату за офис или производственные помещения, платить налоги, нести другие расходы, связанные с бизнесом. Сумма денег, которую предприниматель получает от своей деятельности, называется выручкой. Если из выручки вычесть затраты, образуется прибыль либо убыток.

Здесь мы говорим только в самых общих понятиях, вообще же анализ и моделирование предпринимательской деятельности очень сложны и интересны. Для решения задач из настоящего сборника важно запомнить, что есть выручка и затраты, а разница между ними дает прибыль или убыток.

При рассмотрении доходов, полученных при работе по найму, следует отличать начисленную заработную плату и выплаченную на руки. Начисленная заработная плата больше выплачиваемой на величину налогов, которые в соответствии с законодательством уплачиваются государству.

Важно знать, что бывает сдельная заработная плата и повременная. Возможна также их комбинация, когда часть заработной платы может быть повременной, или постоянной (выплачивается за отработанный период времени), а часть – сдельной, или переменной, зависящей от эффективности труда.

В задачах, связанных с доходами, всегда предполагается, что человек стремится их максимизировать при прочих равных условиях.

Очень важно иметь представление и о налогах потому, что они являются источником средств для существования государства. На эти деньги содержатся армия, полиция, оказываются социальные услуги. Из них государство выплачивает пенсии и вообще оплачивает значительную часть государственных расходов.

Нужно понимать, каким образом облагаются налогами ваши доходы или имущество, как правильно рассчитать сумму к уплате, знать о ситуациях, в которых налоговое бремя может быть законным образом уменьшено (о налоговых льготах, к которым относятся, например, налоговые вычеты при покупке жилья или получении платных образовательных услуг).

Договариваясь с работодателем о величине заработной платы, нужно обязательно иметь в виду, что из нее будет вычитаться подоходный налог. За владение машиной или квартирой придется ежегодно платить налог на имущество. Неуплата налога в установленный срок ведет к начислению штрафов (пеней), к судебным разбирательствам.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

Важные навыки, которые следует отрабатывать с учениками при решении и разборе задач, связанных с доходами:

1. расчет суммы ожидаемого дохода при разных системах оплаты труда – повременной, сдельной или комбинированной. Учащиеся должны осознать преимущества и ограничения каждой системы. В частности, при повременной оплате работнику гарантирован стабильный доход, однако его размер в меньшей степени зависит от качества и интенсивности работы. При сдельной оплате доход работника напрямую связан с количеством выполненной работы, однако при отсутствии достаточного объема производственных заданий работник рискует остаться вовсе без зарплаты. Комбинированная система позволяет частично компенсировать недостатки обеих систем;
2. расчет величины дохода после налогообложения. Необходимо отработать порядок вычисления размера выплаченной заработной платы на основании данных о начисленной зарплате, а также проведение обратного расчета суммы начисленной заработной платы при известной сумме, выплачиваемой на руки;
3. расчет величины предпринимательского дохода (в контексте данного материала – это прибыль предпринимателя). Следует отработать с учащимися порядок расчета предпринимательского дохода. Упрощенно: предпринимательский доход представляет собой разницу между совокупной выручкой и совокупными расходами предприятия;
4. определение зависимости дохода и прибыли от цен на товары, работы и услуги и спроса. В условиях задач дана зависимость объема продаж от цен (как правило, она обратная – чем выше цены, тем меньше объем продаж) и зависимость дохода от объема продаж (прямая –

чем больше объем продаж, тем больше доход). В то же время при снижении цены уменьшается разница между доходами и расходами на единицу продаваемого товара (услуги). Необходимо показать метод поиска цены, при которой прибыль от продаж максимальна, а также цены, при которой достигается безубыточность (доходы равны расходам);

5. расчет подоходного налога и социальных взносов; При обсуждении задач важно, чтобы школьники поняли порядок их начисления и умели самостоятельно рассчитывать суммы, выплачиваемые работнику на руки, и суммы, которые должны быть уплачены в бюджет
6. расчет налога на имущество и других персональных налогов, понимание их отличия от подоходного налога;
7. понимание порядка применения налоговых вычетов и расчет суммы возмещения при применении ряда конкретных вычетов, предусмотренных действующим налоговым кодексом .

Необходимые сведения из курса математики

Для решения данных задач учащемуся потребуются в основном следующие навыки: арифметические действия с многозначными числами, работа с процентами, долями и дробями; умение извлекать информацию из таблиц, графиков и диаграмм; умение внимательно читать условие; составлять и решать линейные уравнения.

Термины, которые учащийся освоит

Доход (личный доход) – денежная сумма, поступающая в распоряжение человека в виде заработной платы, стипендии, гонораров, арендной платы, процентов от вклада в банке и т.п.

Выручка – сумма, получаемая предпринимателем или предприятием от продажи результатов своей деятельности.

Прибыль – положительная разница между выручкой и совокупными затратами (результат вычитания, когда выручка больше затрат).

Убыток – отрицательная разница между выручкой и совокупными затратами (результат вычитания, когда выручка меньше затрат).

Функция спроса – зависимость объема продаж товара (или выручки) от цены на товар.

Сдельная оплата труда – система, при которой размер заработной платы зависит от объема выполненной работы.

Повременная оплата труда – система, при которой заработная плата начисляется пропорционально затраченному рабочему времени.

Оклад - фиксированная денежная выплата, которая выплачивается работнику за выполнение трудовых обязанностей определенной сложности (квалификации).

Премия - поощрительная выплата работнику за высокую квалификацию, перевыполнение плана работы, за высокое качество работы и другие достижения в дополнение к окладу.

Комбинированная оплата труда – система, при которой часть заработной платы выплачивается в зависимости от затраченного рабочего времени, а часть – зависит от объема выполненных работ.

Фонд оплаты труда – общая сумма денежных средств, которую тратит предприятие на заработную плату персонала, включая премии, надбавки, компенсации.

Реальный доход – сумма средств, на которую можно приобрести определенный набор товаров и услуг с поправкой на изменение цен. Реальный доход может расти или падать, даже если ваша зарплата остается неизменной, и наоборот, он может оставаться на одном уровне, несмотря на изменения в зарплате. Так, если цены на товары вырастут, на прежнюю зарплату вы сможете купить меньшее количество этих товаров, а значит, ваш реальный доход уменьшится. Если же зарплата увеличится пропорционально росту цен, вы сможете купить на нее в точности столько же товаров, сколько и раньше, а значит, ваш реальный доход не изменится.

Регрессивное налогообложение – система налогообложения доходов, при которой ставка налога снижается с ростом дохода.

Прогрессивное налогообложение – система налогообложения доходов, при которой ставка налога увеличивается по мере роста дохода.

Налог на доходы физических лиц (НДФЛ, подоходный налог) – налог, который уплачивается с суммы заработной платы, начисленной работнику.

Налог на землю – налог, уплачиваемый собственником земельного участка; сумма зависит от стоимости земельного участка.

Транспортный налог – налог, уплачиваемый собственником транспортного средства; сумма налога зависит от стоимости транспортного средства.

Страховые взносы – суммы, рассчитанные в процентах от заработной платы каждого работника, которые работодатель отчисляет в пенсионный фонд, фонд социального страхования, фонд обязательного медицинского страхования

Налоговые вычеты – это сумма, на которую разрешается уменьшить размер дохода при расчете налога. У кого и в каких случаях появляется право на налоговый вычет, описывает Налоговый кодекс Российской Федерации.

Штрафы — вид наказания за правовое или налоговое нарушение в денежной форме.

Пени — вид наказания в денежной форме; применяется за невыполнение в срок финансового обязательства и устанавливается в процентах от суммы неисполненного обязательства.

Примеры решения и обсуждения задач

25*. Владимир хочет устроиться на работу менеджером по продажам промышленной техники (грузовиков и экскаваторов) в одну из двух фирм с разными формами оплаты труда. В фирме М ему обещают ежемесячно платить фиксированную заработную плату в размере 80 000 рублей. В фирме Н ему предлагают комбинированную (сдельно-повременную) оплату труда, при которой фиксированная часть ежемесячной платы составит 30 000 рублей, а переменная часть будет рассчитываться как 0,5% от стоимости проданной Владимиром техники. Известно, что в среднем в фирме Н за месяц продаются 2 грузовика стоимостью 5 000 000 рублей и один раз в 3 месяца – 1 экскаватор стоимостью 7 000 000 рублей. В какой фирме ежемесячная заработная плата Владимира может быть выше?

Решение. Рассчитаем сдельную оплату труда в фирме Н и сравним ее с предложением фирмы М. Из условия известно, что один экскаватор продается в среднем раз в три месяца, а грузовиков за три месяца в среднем продается шесть. Удобно рассчитать сдельную оплату в фирме «Н» за три месяца:

$$30000 \cdot 3 + 6 \cdot 500000 \cdot 0,0005 + 7000000 \cdot 0,005 = 275000.$$

Значит, среднемесячная зарплата составит $275000 : 3 = 91667$ рублей (с округлением). Следовательно, выгоднее предложение фирмы Н.

Ответ: Н.

Обсуждение. Разумеется, заработная плата является, пожалуй, главным критерием при выборе будущей работы. Если, конечно, выбор есть. Тем не менее, при выборе люди обычно учитывают удаленность места работы от дома, обустроенность рабочего места и другие факторы. Мы здесь обсуждаем только уровень заработной платы, причем исходя из очень жестких предположений. Школьники должны понимать, что такая постановка и такое решение задачи – только упрощенная модель.

26.** В образовательном центре работают 12 преподавателей, 3 руководителя и 5 технических сотрудников. Фонд оплаты труда составляет 900 000 в месяц. Оплата труда сотрудников состоит из базовой и премиальной части. Базовая часть оплаты труда преподавателя 27 000 рублей в месяц. На технических сотрудников приходится 10% фонда оплаты труда. Размер базовой части оплаты труда руководителей (включая директора) устанавливает директор учреждения, она не меньше, чем у других сотрудников учреждения.

Премиальная часть начисляется пропорционально базовой части (но не выплачивается сотруднику в случае серьезных нарушений трудовой дисциплины или невыполнения обязанностей).

Кроме того, оплата труда самого высокооплачиваемого сотрудника учреждения не может превышать среднюю оплату труда более чем в 3 раза.

В каких пределах может быть установлена заработная плата преподавателя учреждения?

Решение. Средняя зарплата в центре $900000 : 20 = 45000$ рублей. На оплату труда руководителей и преподавателей приходится 90%, то есть

$$900000 \cdot 0,9 = 810000 \text{ рублей.}$$

Пусть x рублей – средний размер базовой части оплаты труда руководителей, y – отношение премиальной части к базовой. Тогда

$$(y + 1)(3x + 27000 \cdot 12) = 810000.$$

Поскольку премиальная часть пропорциональна базовой части у всех сотрудников учреждения, то средний размер базовой части руководителей может быть в пределах

$$27000 \leq x \leq 45000 \cdot \frac{3}{y + 1}.$$

Верхняя граница соответствует случаю, когда суммарная зарплата всех руководителей ровно в 3 раза превышает среднюю оплату труда сотрудников учреждения. Решим уравнение при наименьшем и наибольшем значениях x . При $x = 27000$ получаем:

$$(y + 1) \cdot (3 \cdot 27000 + 12 \cdot 27000) = 810000, \text{ откуда } y = 1,$$

и в этом случае оплата труда преподавателя $27000 \cdot 2 = 54000$ рублей. При $x = 135000 : (y + 1)$ получаем:

$$(y + 1) \cdot \left(\frac{135000}{y + 1} \cdot 3 + 27000 \cdot 12 \right) = 810000, \text{ откуда}$$
$$324(y + 1) = 405; y = 0,25.$$

В этом случае оплата труда преподавателя $27 \cdot 1,25 = 33750$ рублей.

Ответ: от 33 750 до 54 000 рублей.

Обсуждение. Начисление зарплаты в образовательных и бюджетных учреждениях в настоящее время производится по алгоритму, близкому к описанной схеме. Так что можно считать, что эта задача не столько для школьников, сколько для руководителей учреждений, которые нередко испытывают значительные трудности в финансовых расчетах. При решении таких задач важно понимать, что средняя заработная плата не зависит от того, как именно она распределена между сотрудниками. Может быть, полезно решить предварительную задачу, которая, несмотря на кажущуюся простоту, в жизни вызывает трудности.

27*. В образовательном центре фонд оплаты труда составляет 900 000 в месяц. Фонд состоит из базовой части и премиальной части. После распределения всех денег, включая премиальную часть, оказалось, что средняя зарплата преподавателей составляет 32 000 рублей в месяц. Директор центра хочет поднять среднюю зарплату преподавателей до 40 000 рублей в месяц и рассчитывает этого добиться за счет перераспределения премиальной части фонда. Какое из предложенных ниже действий поможет ему увеличить среднюю зарплату сотрудников учреждения?

- А) Распределить всю премиальную часть между самыми низкооплачиваемыми сотрудниками.
- Б) Распределить всю премиальную часть между самыми высокооплачиваемыми сотрудниками.
- В) Отдать всю премиальную часть одному учителю с самой низкой базовой частью;
- Г) Отдать всю премиальную часть одному учителю с самой высокой базовой частью.

Ответ: никакое; средняя зарплата не зависит от способа ее распределения между учителями.

28*. В городе N водители Ларионов и Кутько арендуют такси у автопарка и возят пассажиров по маршруту «аэропорт – центр города» туда и обратно. Расходы на поездку в одну сторону (стоимость бензина) составляют 60 рублей. Кроме того, водители платят автопарку арендную плату – 1 000 рублей за рабочую смену (независимо от количества поездок). Оба водителя жи-

вут в городе, поэтому начинать и заканчивать смену должны в центре: количество поездок в день будет четным

Экспериментально установлено, что спрос на поездки линейно зависит от цены. В таблице приведены два значения этой зависимости.

Цена поездки, руб.	Спрос, количество поездок смену
230	16
330	14

Какую цену поездки следует установить водителям, чтобы их заработок был максимальным (с учётом оплаты бензина)? Каким при этом будет среднее количество поездок за смену?

Решение. Найдем зависимость прибыли от цены одной поездки:

Составим линейную функцию $y(x)$, где x рублей – установленная цена поездки, а y – число поездок с пассажиром:

$$y = -0,02x + 20,6.$$

Общая прибыль от поездок одного автомобиля с пассажиром за смену тогда равна

$$f(x) = y(x - 60) - 1000 = -0,02x^2 + 21,8x - 2236.$$

При этом мы пока забываем о том, что водителю нужно будет вернуться в город, даже если он едет без пассажира. Наибольшее значение эта функция имеет при $x = \frac{21,8}{0,04} = 545$, а среднее

число поездок с пассажирами при этом $20,6 - 0,02 \cdot 545 = 9,7$.

Значит, оптимальная цена близка к 545 рублям. Посмотрим, что будет, если назначить цену 520, 530 или 540 рублей, и здесь уже учтем, что бензин на каждую поездку стоит 60 рублей, независимо от того, едет водитель с пассажиром или без.

Цена поездки, руб.	Спрос, количество поездок за смену	Общее количество поездок с учетом возвращения в центр	Прибыль
520	10,2	12	$10,2 \cdot 520 - 1000 - 12 \cdot 60 = 3584$ руб.
530	10	10	$10 \cdot 530 - 1000 - 10 \cdot 60 = 3700$ руб.
540	9,8	10	$9,8 \cdot 540 - 1000 - 10 \cdot 60 = 3692$ руб.

Ответ: 530 руб., 10 поездок.

Обсуждение. Эта задача, наряду с соседними задачами со сходным сюжетом, должна показать принципы ценообразования на товары и услуги в условиях конкурентного предложения и спроса, который связан с ценой. Водитель такси может целый день ждать одного пассажира, который по неведению или вынужденно согласен заплатить непомерно высокую цену, а может снизить цену и зарабатывать на большем числе поездок. В разных условиях та или иная стратегия может оказаться выигрышной. Встречаются случаи сговора, когда водители такси согласованно завышают цены и выдавливают с рынка добросовестных таксистов, которые предпочитают много ездить по разумным ценам. В последнее время в условиях жесткой конкурентной борьбы побеждают трудолюбивые, в частности, благодаря интернет-сервисам вызова такси. Ленивые и жадные, ждущие «богатого клиента», проиграли.

Следующая задача – тоже пример ценообразования, но в другой ситуации. Нужно найти «точку безубыточности» – цену, при которой небольшой частный магазин конкурентоспособен и не несет убытков.

29.** Елена продает кашпо для цветов, покупая их на оптовой базе по 350 рублей за штуку. Под свой небольшой магазин площадью 75 кв. метров она арендует помещение по ставке 5500 рублей в год за квадратный метр. Помимо Елены, в магазине работают еще два сотрудника, на выплату им заработной платы (включая налоги) она тратит 195 000 рублей в месяц. На рисунке показано, как зависит месячный объем продаж магазина от цены на кашпо. Также известно, что при цене выше 700 рублей кашпо продаваться не будет.



При каких ценах на кашпо и соответствующих им объемах продаж в месяц у магазина Елены не будет убытков? Для удобства расчетов объем закупок (количество закупаемых единиц товара) следует считать равным объему продаж в том же месяце. Ответ дайте с округлением до целых.

Решение. Сначала определим величину постоянных расходов фирмы в месяц (арендная плата и зарплата):

$$75 \cdot \frac{5500}{12} + 195000 = 229375 \text{ рублей в месяц.}$$

Функция зависимости объема продаж от цены имеет вид $y = kx + b$, где y – объем продаж, x – цена. Взяв две произвольные точки графика, например: $(400; 1790)$ и $(550; 1400)$, можно найти k и b из системы

$$\begin{cases} 400k + b = 1790, \\ 550k + b = 1400. \end{cases}$$

Получаем: $k = -2,6$, $b = 2830$, то есть $y = -2,6x + 2830$ или $x = \frac{2830 - y}{2,6}$.

Составим уравнение, связывающее объем продаж и цену. Прибыль равна выручке без всех затрат – постоянных и переменных:

$$yx - 350y - 229375 = 0.$$

Подставляя $x = \frac{2830 - y}{2,6}$, получаем квадратное уравнение

$$y^2 - 1920y + 596375 = 0,$$

которое имеет два корня 389,71 и 1530,39 (с округлением до сотых).

Цены для этих объемов $x_1 = 938,57$ и $x_2 = 499,89$ соответственно. Вспоминаем, что цена не может быть больше 700 рублей за единицу и отбрасываем постороннее решение. Осталось округлить подходящие значения до целых.

Ответ: 500 руб. и 1530 шт. в месяц.

Обсуждение. Вряд ли эту задачу можно отнести к задачам управления личными финансами. Скорее, эта задача является типичной для расчета рентабельности небольшого торгового предприятия. Тем не менее школьникам полезно понимать, что, помимо доходов, предприниматель имеет расходы и находится в довольно жестких условиях, когда необходимо принимать верные решения. Можно обсудить со школьниками, что предложенная графически функция зависимости спроса от цены в жизни вряд ли является линейной. Скорее, зависимость более сложная. Однако в реальных расчетах сложные зависимости заменяют линейными или кусочно-линейными функциями, сохраняя приемлемую точность модели, но обеспечивая удобство и простоту счета. В этой задаче, как и во множестве других реальных задач, расчеты громоздкие, и нужно пытаться сделать их без калькулятора.

Тема 3. Личный и семейный бюджет и его балансировка

Почему важно уметь решать такие задачи

Практически ежедневно каждый взрослый человек принимает различные финансовые решения. Иногда это трата карманных денег, а иногда – покупка недвижимости. Эти решения могут повлечь за собой ощутимые последствия: например, получение кредита в банке на покупку машины может вылиться в то, что семья не поедет летом на курорт, а вовремя сделанный вклад в банке под высокий процент позволит семье оплатить качественное образование своему ребенку. Каждый раз человек вынужден выбирать наилучший из вариантов, потому что бюджет ограничен.

Результат каждого из принятых финансовых решений превращается в доход или расход в личном бюджете. Для того чтобы спрогнозировать свой бюджет, необходимо знать свои доходы и расходы, включающие покупку продуктов питания, одежды, коммунальные платежи, расходы на образование, медицинские услуги, покупку автомобиля, квартиры или земельного участка и т. д.

В ситуации, когда совокупные расходы превышают совокупные доходы, говорят о дефиците бюджета, в обратной ситуации – о бюджетном профиците.

Дефицит личного бюджета – ситуация рискованная и допустимая лишь на короткий период. Чтобы сбалансировать бюджет, необходимо либо увеличить доходы, либо сократить расходы.

Если же доходы бюджета превышают расходы, появляется возможность для накоплений. Они нужны, например, при планировании крупной покупки, на которую выделить деньги из текущих доходов затруднительно. Для того чтобы накопить, нужно планомерно откладывать часть доходов. Если известно, насколько доходы больше расходов, можно посчитать, какая сумма образуется за год или пять лет и понять, когда планировать покупку.

Недальновидные, поспешные и импульсивные финансовые решения опасны. Например, перед тем, как взять деньги в кредит, следует задуматься, насколько обременит вас сумма регулярных выплат, учитывая еще и то, что, как правило, это достаточно долгий процесс.

Каждый день в мире происходят изменения, которые могут отразиться на нашем финансовом состоянии: дорожает бензин, меняются ставки по кредитам, растет заработная плата и т.д. Очень важно уметь учитывать эти изменения, подстраиваться под них и оперативно менять свои финансовые решения.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

Принимая решения о распределении доходов, важно уметь анализировать и упорядочивать расходы в порядке важности. Первыми должны исполняться наиболее важные для жизни статьи расходов: на питание, одежду, жилье и коммунальные услуги, оплата кредита. Затем должно приниматься решение о том, как распределить оставшуюся сумму между менее важными тратами (поездка в отпуск, покупка украшений или автомобиля) и, возможно, накоплениями.

Учащимся необходимо понимать механизм появления накоплений, в том числе для целой семьи, бюджет которой является общим, уметь рассчитывать общую сумму накоплений и сравнивать ее со стоимостью желаемой вещи, делать выводы о возможности покупки и времени, когда эта покупка может состояться.

Необходимо помнить о том, что распределение средств между расходами происходит при ограниченном бюджете, то есть далеко не все желания могут быть реализованы. Поэтому задачи могут сводиться к поиску наилучших из доступных альтернатив.

Важно уметь выстраивать причинно-следственные связи. Например, рост цен на транспорт при неизменных доходах повлечет за собой уменьшение других расходов.

Необходимые сведения из курса математики

Для решения данных задач учащемуся потребуются в основном следующие навыки: арифметические действия с многозначными числами, работа с процентами, долями и дробями; умение извлекать информацию из таблиц, графиков и диаграмм; умение внимательно читать условие; составлять и решать линейные уравнения.

Термины, которые учащийся освоит

Личный бюджет – сумма всех денежных средств, которыми человек располагает в данный момент; другое значение – совокупность доходов и расходов в течение периода времени (месячный бюджет, годовой бюджет).

Накопления (сбережения) – не потраченная часть доходов, либо помещенная на банковский счет, либо хранящаяся в виде наличных денег или переведенная в какие-то ценности (акции, коллекционные монеты, драгоценные металлы и т.п.).

Дефицит бюджета – превышение расходов над доходами за определенный период (месяц, год).

Профицит бюджета – превышение доходов над расходами за определенный период (месяц, год).

Обязательные ежемесячные расходы – расходы, без которых нельзя обойтись. В них входит стоимость минимального набора продуктов питания, одежды, оплата коммунальных услуг, расходы на транспорт, оплата кредитов или алиментов (при наличии).

Примеры решения и обсуждения задач

30. Мама дает Леше 5 000 рублей в месяц. 20% этих денег Леша тратит на проезд в транспорте, четыре раза в месяц он ходит в кино (билет стоит 250 рублей), все остальное Леша тратит на еду, занятия английским языком, подарки, канцтовары. Стоимость проезда в транспорте выросла на 10%, билеты в кино подорожали на 20%, прочие расходы не изменились. Сколько раз в месяц сможет Леша сходить в кино, если мама дает ему прежнюю сумму денег?

Решение. Прежде Леша тратил на транспорт $5000 \cdot 0,2 = 1000$ рублей, на кино $250 \cdot 4 = 1000$ рублей, итого 2000 рублей. Поскольку мама дает Леше прежнюю сумму денег, а прочие расходы не изменились, Леша может потратить на транспорт и кино по-прежнему 2000 рублей. Однако расходы на транспорт увеличились на 10% и теперь составляют $1000 \cdot 1,1 = 1100$ рублей. Следовательно, на кино остается 900 рублей, а цена билета выросла до $250 \cdot 1,2 = 300$ рублей. Значит, Леша может пойти в кино $900 : 300 = 3$ раза.

Ответ: 3.

Обсуждение. Задача наглядно иллюстрирует явление обесценивания денег и планирования мини-бюджета. Мы отмечали, что мотивация к задачам про деньги возникает у школьников тогда, когда у них появляются первые деньги, например карманные. Как правило, это случается раньше, чем школьники переходят в старшую школу. Такую задачу можно было бы обсудить уже в шестом классе при изучении темы «Проценты».

31. Семья Ивановых потратила в мае на питание и транспорт 26 800 рублей, а на приобретение одежды и обуви – в четыре раза меньше. Кроме того, на квартирную плату и другие текущие расходы ушло 23 100 рублей. Сколько денег удалось Ивановым отложить на летний отдых, если они решили откладывать на него все не израсходованные за месяц доходы, при этом общий доход семьи в этом месяце составил 62 700 рублей?

Ответ: 6100 рублей.

Обсуждение. Это совсем простая задача, цель которой лишь показать, что такое личные или семейные сбережения.

32. У молодой семьи совместный ежемесячный доход составляет 50 000 рублей, а обязательные ежемесячные расходы (питание, коммунальные платежи, транспорт и прочее) – 43 000 рублей.

К началу текущего года семье удалось накопить 45 000 рублей. Семья планирует купить новую мебель на кухню стоимостью 67 000 рублей за счет собственных средств. В каком месяце текущего года семья сможет это сделать? Считайте, что пополнение бюджета происходит в последний день каждого месяца, а покупка мебели возможна не раньше следующего дня. В ответе укажите календарный месяц.

Решение. Разница доходов и расходов семьи составляет $50\,000 - 43\,000 = 7\,000$ рублей в месяц. Недостающая сумма средств для покупки мебели составляет $67\,000 - 45\,000 = 22\,000$ рублей. Эта сумма будет достигнута через $22000 : 7000 \approx 3,1$ месяцев. Округляя вверх, получаем 4 месяца. Учтем, что недостающая сумма у семьи появится в конце апреля. Следовательно, приобретение мебели возможно в мае.

Ответ: Май.

Обсуждение. Разумеется, не вполне точно объясняются некоторые детали: зарплату за месяц можно тратить только в следующем месяце. Несмотря на некоторую вольность в формулировке (попробуйте сделать иначе, не лишая текст жизненности), задача актуальна. Цель – научиться делать прикидки. Разумеется, школьники могут поспорить, посоветовать героям задачи дополнительно «позэкономить» – ведь обидно из-за «одной десятой месяца» ждать еще целый месяц. Здесь нужно вспомнить, что такое обязательные ежемесячные расходы: не следует экономить на оплате квартиры или других неотложных приобретениях. Кто-то может посоветовать взять займы деньги у соседей или родителей. Вспомним: в условии предполагается, что покупка должна быть произведена за счет собственных средств, то есть без привлечения займов. Задача жизненная и несложная с математической точки зрения.

Тема 4. Сбережения и инвестиции

Почему важно уметь решать такие задачи

Чтобы избежать финансовых проблем, человек не должен тратить деньги на что попало, а должен соизмерять свои потребности и связанные с ними расходы со своими возможностями, иначе говоря, человек должен управлять своими денежными средствами..

Разумное финансовое поведение предполагает, что человек при возможности делает накопления (сбережения), то есть откладывает часть своих денег на будущее. Люди сберегают деньги с разными целями: накопить средства для крупной покупки, иметь запас на «черный день», использовать накопления как источник дополнительных доходов.

Делать сбережения также можно по-разному. Самый простой вариант – хранить деньги дома, но в этом случае сбережения не будут приносить доход, кроме того, велик риск потерять их в результате кражи или иного происшествия.

Выгодно положить деньги в банк. За пользование вашими деньгами банк заплатит проценты, таким образом, сбережения будут «работать» и приносить доход. Величина процентов зависит от срока и других условий, на которых оформлен банковский вклад. Условия, на которых банки предлагают разместить у них деньги, могут сильно отличаться. Как правило, у более надежных банков условия вклада менее выгодные, чем у банков, ведущих рискованные финансовые операции.

О том, что высокий доход всегда связан с более высоким риском, особенно важно помнить в том случае, если вы решите на свои сбережения купить ценные бумаги (акции, облигации, паи инвестиционных компаний). Таким образом, вы вкладываете свои средства в чужой бизнес, который может стать очень успешным и принести вам большие доходы, но может и разориться, и в этом случае вы потеряете все что вложили.

Именно поэтому в отношении сбережений действует золотое правило: «не кладите все яйца в одну корзину». Нужно распорядиться средствами так, чтобы часть их была сохранна и легко доступна, даже если при этом не приносит больших доходов, а часть – приносила значительный, хотя и менее гарантированный, доход.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

При решении и обсуждении задач желательно сформировать у обучающихся представления и навыки, связанные с банковскими депозитами и другими видами сбережений:

1. расчет суммы с учетом процентов, причитающихся к выплате вкладчику по окончании срока депозита либо при досрочном его прекращении;
2. расчет суммы процентов с учетом конкретных условий банковского депозита (возможность пополнения, капитализации, график начисления процентов и пр.);
3. сравнение условий депозитов, предлагаемых различными банками, с учетом всех ограничений и дополнительных требований;
4. оценка доходности различных вариантов размещения сбережений;
5. учет рисков, связанных с вложением средств в различные финансовые инструменты;
6. оценка реальной доходности сбережений с учетом роста цен;
7. сравнение доходности сбережений в рублях и иностранной валюте.

Необходимые сведения из курса математики

Для решения данных задач учащемуся потребуются следующие навыки: работа с процентами, долями и дробями; умение применять свойства геометрической прогрессии, умение составлять и решать уравнения.

Термины, которые учащийся освоит

Банковский вклад (депозит) – сумма денег, размещенная в банке на специальном личном счете клиента. Вкладчик отдает банку свои деньги, и банк может ими пользоваться, пока клиент не захочет их забрать обратно, поэтому вклад можно понимать как долг банка перед клиентом.

Обычно вклад делается на определенный срок (срочный) или до востребования (бессрочный), а за время, пока деньги находятся в распоряжении банка, он выплачивает вкладчику проценты.

Срочный вклад – вклад, размещенный в банке на определенный срок. Как правило, по истечении срока, вклад закрывается, но клиент может его продлить на тех же условиях. В большинстве случаев операции со срочными вкладами до истечения их срока не разрешены либо ограничены: нельзя снять средства, а иногда нельзя и пополнить вклад. Более точно и подробно это определяется условиями вклада.

Вклад до востребования – вклад, который можно полностью или частично снять в любой момент. Как правило, процентная ставка по вкладам до востребования намного ниже, чем по срочным вкладам.

Процент по вкладу (процентная ставка по вкладу) – сумма денег, которую банк добавляет к вкладу клиента один раз за определенный период, тем самым банк платит клиенту за право использовать его деньги. Как правило, ставка измеряется в процентах от размера вклада за год. При этом начислять проценты по вкладу банк может и чаще, чем раз в год. Это зависит от срока вклада. Обычно начисление производится ежемесячно или раз в три месяца.

Вкладчик – клиент банка, сделавший вклад (поместивший деньги или другие ценности на депозит). Клиент и банк заключают договор, в котором подробно описаны все условия вклада: тип вклада, срок, передаваемая банку сумма денег (или других ценностей), процентная ставка, график начисления процентов, возможность пополнения вклада и снятия денег и пр.

Капитализация банковских процентов – прибавление начисленных процентов по вкладу к сумме вклада. При следующем начислении процентов их сумма рассчитывается от увеличенной суммы вклада и снова прибавляется к сумме вклада. И так при каждом начислении процентов до истечения срока вклада.

Пополнение вклада или снятие средств – операции, которые вкладчик может делать во время действия вклада. Очень часто условия срочных вкладов не разрешают снятие, а иногда и пополнение тоже. Если клиент все же захочет забрать свои деньги раньше срока, он тем самым нарушит условия договора. Банк обязан вернуть вкладчику сумму вклада, но процентов заплатит меньше, или не заплатит их вовсе.

Взнос на депозит (пополнение вклада) – сумма, которую вкладчик добавляет к своему вкладу.

Риск невозврата вклада – вероятность потери сбережений в результате кражи, стихийного бедствия, разорения банка и других непредвиденных обстоятельств.

Рассрочка – выплата цены товара частями на протяжении оговоренного времени.

Реальный доход – сумма средств, на которую можно приобрести определенный набор товаров и услуг с поправкой на изменение цен. Реальный доход может расти или падать, даже если ваша зарплата остается неизменной, и наоборот, он может оставаться на одном уровне, несмотря на изменения в зарплате. Так, если цены на товары вырастут, на прежнюю зарплату вы сможете купить меньшее количество этих товаров, а значит, ваш реальный доход уменьшится. Если же зарплата увеличится пропорционально росту цен, вы сможете купить на нее в точности столько же товаров, сколько и раньше, а значит, ваш реальный доход не изменится.

Акция – ценная бумага, которая выпускается компанией на продажу. Покупая акцию, человек (акционер) тем самым дает компании деньги на ее развитие и становится совладельцем компании (владельцем доли, соответствующей числу купленных акций). Купленные акции человек может в дальнейшем продать. В зависимости от экономической ситуации акции компании могут дорожать или дешеветь, тем самым увеличивая или уменьшая сбережения акционера. Раз в определенный период компания начисляет доход по акциям, подобно тому, как банк начисляет проценты по вкладу. Как и в случае с банковским вкладом, высокодоходные акции, как правило, связаны с большим риском.

Страхование вкладов – заключение договора со страховой компанией, которая обязана покрыть полностью или частично убытки вкладчика в случае разорения банка или по другим причинам. В России обязательное страхование вкладов осуществляет специальное страховое агентство (Агентство по страхованию вкладов, или АСВ). Все банки платят обязательные взносы этому агентству. Из денег, полученных от банков и частично из бюджета Российской Федерации, АСВ и выплачивает компенсации пострадавшим вкладчикам.

Примеры решения и обсуждения задач

33. Банк начисляет на счет 10% годовых. Вкладчик положил на счет 900 рублей. Сколько рублей будет на этом счете через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счетом проводиться не будет?

Решение. $900 \cdot 1,1 = 990$ рублей

Ответ: 990.

Обсуждение. Это – вводная задача. Важно показать принцип начисления процентов. Следующая задача иллюстрирует еще более важную идею: как происходит ежемесячное начисление процентов с их капитализацией при той же ставке 10%

34. Банк начисляет на счет 10% годовых. Вкладчик положил на счет 900 рублей. Какая сумма будет на этом счете через год, если проценты начисляются ежемесячно и капитализируются, а никаких иных операций со счетом проводиться не будет? Ответ округлите до копеек.

Решение. В году 12 месяцев. Ежемесячно производится начисление $\frac{10\%}{12} = 0,833\%$, то есть имеющийся вклад умножается на 1,00833. К концу года получаем:

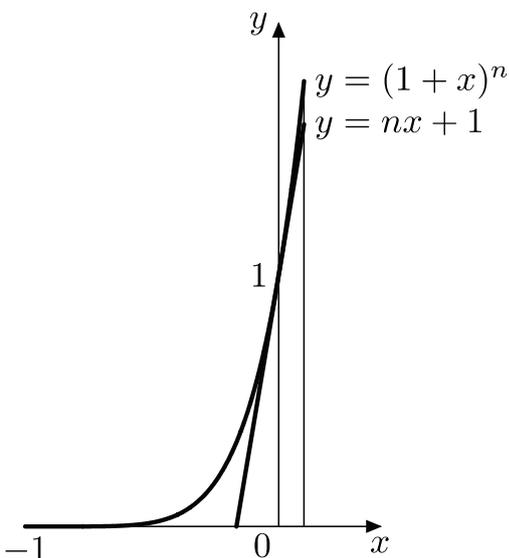
$$900 \cdot (1,00833)^{12} \approx 900 \cdot 1,1046 \approx 994,20 \text{ рубля}$$

Ответ: 994 рублей 20 копеек.

Обсуждение. Здесь важно обратить внимание учащихся на то, что при ежемесячном начислении и капитализации процентов при той же процентной ставке вклад растет больше, чем при однократном начислении процентов в конце года или ежемесячном начислении без капитализации. Так устроены вклады и на самом деле.

Другая сторона вопроса здесь чисто математическая. Результаты, полученные в двух предыдущих задачах, весьма близки. Почему это и при каких условиях они будут расходиться? Рассмотрим функцию

$y = (1 + x)^n$ и касательную к ее графику в точке $x_0 = 0$: $y = nx + 1$. Если x мало (а в нашем случае, как мы помним, $x = \frac{0,1}{12}$), получаем:



$$900 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} \approx 900 \cdot \left(12 \cdot \frac{0,1}{12} + 1\right) = 900 \cdot 1,1$$

Иными словами, при небольших процентных ставках (скажем, не более 20 процентов) разница между начислением процентов с капитализацией и без нее незначительна, и это объясняется близостью касательной к графику многочлена вблизи точки касания.

Рис. 1. График функции $y = (1 + x)^n$ и касательная к нему $y = nx + 1$.

35*. Банк А предлагает срочный вклад на один год под 10% годовых, причем начисление процентов производится единовременно в конце срока. При продлении вклада еще на год условия не меняются.

Банк Б предлагает срочный вклад на один год под 8% годовых. Проценты тоже начисляются единовременно в конце срока. Однако если клиент продлевает срок вклада еще на год, то процентная ставка увеличивается до 12%.

- а) В каком из двух банков клиент за два года заработает больше, если при продлении срока вклада на второй год присоединит проценты к основной сумме вклада?
- б) Какой нужно сделать неизменную процентную ставку в банке А, чтобы приращение вклада в банках А и Б за два года стало одинаковым?

Решение. Предположим, первоначальная сумма вклада равна S рублей. Если $k\%$ – годовая ставка, то по истечении года S умножается на коэффициент $p = 1 + 0,01k$.

- а) В банке А сумма вклада по истечении двухлетнего срока составит

$$S \cdot 1,1^2 = S \cdot 1,21 \text{ рублей,}$$

- а в банке Б у клиента получится

$$S \cdot 1,08 \cdot 1,12 = S \cdot 1,2096 \text{ рублей.}$$

Условия в банке А выгоднее, но незначительно.

- б) Коэффициент годового прироста p в банке А должен равняться среднему геометрическому коэффициентов за первый и за второй год в банке Б:

$$p = \sqrt{1,08 \cdot 1,12} = \sqrt{1,2096} \approx 1,0998$$

Ответ: а) А; б) 9,98%.

Обсуждение. Привлечение клиентов более выгодными условиями во второй, третий год обслуживания встречается в банковской практике нередко. Эта задача должна показать, что 10 процентов каждый год и, скажем, 6, 11 и 13 процентов на протяжении трех лет – не одно и то же, хотя среднее арифметическое вроде бы то же самое.

36*. 1 января Надежда открыла в банке А депозит на 1 000 000 рублей под 10% годовых сроком на 12 месяцев. А ее подруга Мария в тот же день открыла депозит в банке Б на такие же сумму и срок, под 8% годовых. Проценты в обоих банках выплачиваются в конце срока.

Через 6 месяцев банк А обанкротился. К счастью, вклады в банке А были застрахованы Агентством по страхованию вкладов (АСВ). По закону, АСВ возвращает вкладчикам разорившихся банков деньги в сумме депозита и процентов, начисленных к дате банкротства (но не более 1 400 000 рублей). Получив деньги от АСВ, Надежда до конца года больше их никуда не вкладывала.

Банк Б исполнил обязательства по договору и вернул Марии сумму депозита с процентами в конце года.

Кто получил больше по своему вкладу, Надежда или Мария, и на сколько? Ответ дайте в рублях.

Решение. К моменту банкротства (за 6 месяцев) банк А начислил

$$1000000 \cdot 0,10 \cdot \frac{6}{12} = 50000 \text{ рублей}$$

процентов на вклад Надежды. Таким образом, банк А должен был Надежде 1 050 000 рублей, что меньше 1 400 000 рублей. Значит, АСВ вернуло Надежде всю сумму, то есть 1 050 000 рублей. Доход по вкладу составил 50 000 рублей.

Мария получила $1000000 \cdot 0,08 = 80000$ рублей в виде процентов.

Таким образом, Мария получила на 30 000 рублей больше, чем Надежда

Ответ: Мария, на 30 000 руб.

37.** Банк А предлагает вклад «Пополняемый» со ставкой 10% годовых. Проценты ежемесячно капитализируются (прибавляются к сумме вклада). Снятие средств и пополнение возможно в любой момент. Сергей хочет открыть вклад на сумму 15 000 рублей в конце января 2017 г. и пополнять его на 15 000 рублей в конце каждого следующего месяца. Забрать вклад Сергей

планирует в декабре 2019 г. после последнего начисления процентов (без последнего взноса). Какую сумму получит Сергей? Ответ дайте в рублях с округлением до целых чисел.

Решение. Пусть A – ежемесячный взнос, $k\%$ – годовая ставка, n – срок вклада в годах. Через месяц (в конце февраля, первого месяца вклада) накопленная сумма будет равна

$$S_1 = A \left(1 + \frac{0,01k}{12} \right) + A. \text{ Для простоты обозначим коэффициент } 1 + \frac{0,01k}{12} \text{ буквой } p. \text{ В конце}$$

второго месяца сумма на вкладе увеличится до

$$S_2 = S_1 p + A = Ap^2 + Ap + A$$

и так далее для всех остальных месяцев. К концу последнего месяца накопленная сумма составит $Ap^{12n-1} + Ap^{12n-2} + \dots + Ap$. Просуммируем геометрическую прогрессию: $Ap \cdot \frac{p^{12n-1} - 1}{p - 1}$.

Подставим данные из условия:

$$p = 1 + \frac{0,01 \cdot 10}{12} = \frac{121}{120}, \quad A = 15000, \quad n = 3.$$

Тогда

$$Ap \cdot \frac{p^{12n-1} - 1}{p - 1} = 15000 \cdot \frac{121}{120} \cdot \frac{\left(\frac{121}{120} \right)^{35} - 1}{\frac{1}{120}} = 611727 \text{ (с округлением).}$$

Ответ: 611 727 руб.

Обсуждение. Это – классическая во всех смыслах задача, такие задачи составляли значительную часть математики в классических гимназиях в дореволюционной России. Ради таких задач в классический, или традиционный, школьный курс математики когда-то была введена геометрическая прогрессия. Задачи с аналогичной математической моделью возникают при расчете кредитов. Этой теме посвящен следующий раздел.

Тема 5. Кредиты и займы

Почему важно уметь решать такие задачи

Часто люди оказываются в ситуации, когда на неотложную покупку не хватает денег. Если человек имеет регулярный доход, он может накопить необходимую сумму, но это потребует времени. Решить проблему можно, если взять деньги в долг (иначе – в кредит) у других людей или у банка. При этом нужно помнить бессмертное высказывание: *берете вы чужие деньги и на время, а возвращать придется свои и навсегда*. Кроме того, за пользование чужими деньгами, скорее всего, придется платить. Чем дольше срок пользования заемными средствами, тем большую сумму с учетом набежавших процентов нужно будет возвращать.

Попросить деньги в долг можно у знакомых и родственников, но они могут не располагать требуемой суммой, кроме того, не всегда хорошо смешивать деловые и личные отношения. Удобный вариант – обратиться в банк. Собственно, выдача кредитов – важнейшее условие существования банка, главный источник его прибыли.

Банки выдают кредиты на разные цели и на разных условиях. Воспользоваться банковским кредитом можно как при покупке сравнительно недорогих товаров, так и при масштабных приобретениях – покупке квартиры, машины, оплате обучения, лечения и т. п. Во всех случаях следует помнить, что взяв кредит, вы одновременно взяли на себя обязательства по его возврату и оплате процентов. Невыполнение этих обязательств может повлечь за собой серьезные последствия.

Деньги в долг можно взять не только в банке, но и в так называемых микрофинансовых организациях (МФО). Процедура получения денег там намного проще, но и плата за пользование деньгами в десятки, а может быть и в сотни (!) раз выше.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

При решении и разборе подобных задач желательно сформировать у обучающихся следующие знания.

1. расчет полной суммы, которую нужно вернуть банку с учетом процентов и других платежей;
2. расчет стоимости кредита (переплаты) – суммы процентов по кредиту с учетом процентной ставки и срока кредита;
3. расчет аннуитетного платежа на весь срок кредита;
4. умение сравнивать варианты кредитования в разных банках и микрофинансовых организациях с учетом конкретных условий и ограничений.

Необходимые сведения из курса математики

Учащийся должен уметь работать с процентами, пользоваться свойствами геометрической и арифметической прогрессии, уметь составлять и решать уравнения по условию задачи.

Термины, которые учащийся освоит

Заем (кредит) – сумма денег, взятая (выданная) в долг.

Микрофинансовая организация (МФО) – финансовая организация, быстро выдающая небольшие кредиты, обычно с очень жесткими условиями погашения и с огромной процентной ставкой.

Процент по кредиту (процентная ставка по кредиту) – сумма денег, которую банк добавляет к долгу заемщика раз в определенный период за право пользования заемными деньгами и за обслуживание кредитного договора. Как правило, ставка измеряется в процентах от суммы кредита за год. При этом график начисления процентов по кредиту может быть различным – не обязательно раз в год. Обычно, начисление производится раз в месяц. Это определяется сроком кредита и другими условиями договора. Беспроцентный кредит (по сути – рассрочка платежа) встречается довольно редко.

Заемщик (должник) – клиент банка или микрофинансовой организации, взявший кредит.

Кредитный взнос (платеж) – сумма, которую заемщик платит для погашения кредита один раз в установленный период (обычно раз в месяц).

Аннуитет (аннуитетные платежи) – это равные по сумме выплаты по кредиту за равные промежутки времени (месяц, квартал), которые включают в себя сумму начисленных процентов за кредит и сумму основного долга.

Досрочное погашение – полная или частичная досрочная выплата кредита. При этом заемщик выигрывает, поскольку не платит проценты за оставшийся срок. При заключении договора нужно внимательно изучать пункты, касающиеся возможности и условий досрочного погашения.

Примеры решения и обсуждения задач

38. Иван рассматривает предложения двух банков по автокредиту на сумму 500 000 рублей на 3 года.

Банк А по такому кредиту предлагает ставку 14% годовых с выплатой долга и процентов равными (аннуитетными) платежами в размере 17 088,81 рублей в месяц.

Банк Б по такому кредиту предлагает ставку 14% годовых. Каждый квартал на оставшуюся часть основного долга он начисляет проценты (четверть годовых процентов), которые нужно сразу выплатить. Также одновременно с выплатой процентов заемщик должен возвращать основной долг равными частями – по одной двенадцатой (по количеству кварталов за весь срок кредита) полученной суммы.

Сколько составит суммарный платеж за первый квартал пользования кредитом в каждом из банков? Ответ округлите до целых значений.

Решение. По кредиту банка А за первый квартал потребуется сделать 3 аннуитетных платежа. Значит, сумма платежей составит: $17\,088,81 \cdot 3 = 51\,266,44$ руб.

Рассчитаем платеж банку Б за первый квартал (все данные приведены в рублях):

Долг на начало периода	Платеж по основному долгу	Долга на конец периода	Сумма процентов	Платеж за первый квартал
500 000	41 667	458 333	17 500	59 167

Платеж банку «Б» за первый квартал пользования кредитом составит – 59 167 руб.

Ответ: А – 51 266,44; Б – 59 167.

39. Остап Ибрагимович имеет стабильный доход, работая по найму. Ему выплачивают зарплату равными частями дважды в месяц через равные промежутки времени. И за целый год не было ни одного отклонения от графика. Тем не менее Остапу Ибрагимовичу регулярно недоставало денег, поэтому за 10 дней до каждой выплаты зарплаты он брал заем в микрофинансовой организации «Утром деньги» на сумму 15 000 рублей и исправно возвращал его в день получения зарплаты. За день пользования кредитом Остап Ибрагимович платил 2% от суммы кредита. Сколько всего выплатил за год процентов Остап организации «Утром деньги»? Ответ дайте в рублях.

Решение. В году у Остапа 24 зарплатных выплаты, каждый раз перед такой выплатой он брал одну и ту же сумму 15 000 рублей в кредит на 10 дней, значит, суммарно его долг составлял 15 000 рублей в течение 240 дней. Всего за год Остап выплатил процентов на сумму $15\,000 \cdot 0,02 \cdot 240 = 72\,000$ рублей (помимо своего основного долга в 15 000 рублей).

Ответ: 72 000 руб.

Обсуждение. Распространенное явление – взять немного денег на короткий срок (когда «немножко до зарплаты не хватает») в микрофинансовой организации. Деньги там можно получить быстро, как правило, без больших формальностей, да и сумма процентов по каждому займу вроде бы невелика – 3 000 рублей, однако за год за пользование деньгами Остап выплатил процентов почти в 5 раз больше суммы полученных денег. Не стоило ли Остапу отрегулировать бюджет своих доходов и расходов, чтобы не брать займы в микрофинансовой организации?

Тема 6. Расчеты

6.1. Валютные расчеты

Почему важно уметь решать такие задачи

Каждый раз, отправляясь за границу, мы интересуемся курсом валюты страны, в которую едем, ведь далеко не везде можно все свои покупки оплатить рублями, а если и можно, то цены в рублях могут оказаться сильно завышенными. Казалось бы, разница в 3–4% не слишком значительна, однако если учесть, что отпуск обычно сопровождается большими расходами, особенно если рассматривать целую семью, и 3–4% от этих расходов – не такая уж и маленькая сумма. Поэтому лучше заранее решить:

- обменять ли наличные заранее или лучше это сделать в стране назначения; если обменять, то какую сумму;
- снимать ли деньги в банкомате и использовать наличные или оплачивать покупки банковской картой;
- какую из банковских карт взять с собой или лучше завести специальную карту.

Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо уметь производить валютные расчеты. При обмене валюты курс покупки и курс продажи различаются. Банки всегда указывают их «от своего лица»: курс покупки – это курс, по которому банк готов купить данную валюту за рубли, а курс продажи – курс, по которому банк готов продать эту валюту. Разумеется, курс продажи всегда выше, чем курс покупки. Поэтому невыгодно покупать лишнюю валюту, рассчитывая потом продать ее излишки снова банку.

В настоящее время очень быстрыми темпами растут объемы покупок через интернет. Часто люди покупают товары на сайтах зарубежных магазинов, которые не принимают рубли. При совершении таких покупок также важно отслеживать изменения курсов валют. Возможно, что курс с тех пор, как вы интересовались им в последний раз, значительно вырос, и товар, который вы хотели купить, стал слишком дорогим.

Вопрос курса валют так же актуален для бизнеса, как и для отдельно взятого человека, поскольку многие компании закупают сырье и оборудование за границей.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

При решении и обсуждении задач, в которых требуются валютные расчеты, следует обратить внимание учащихся на разницу между курсом покупки и курсом продажи, по которым работает конкретный банк в конкретный момент, а также на отличие этих курсов от курса соответствующей валюты, установленного Банком России. Многие люди ошибочно думают, что, придя в банк, они будут покупать (например, доллары) по курсу покупки, а продавать – по курсу продажи.

Следует подчеркнуть важность точности расчетов и самопроверки, потому что в данной теме в большом объеме имеют место расчеты с десятичными дробями.

В результате решения задач учащийся должен уметь переводить деньги из одной валюты в другую, выбирать из нескольких предложенных курсов наиболее выгодный (как в случае покупки,

так и в случае продажи), рассчитывать изменение стоимости товара, продающегося в одной валюте, выраженное через другую валюту.

Необходимые сведения из курса математики

Учащийся должен уметь работать с процентами и дробями и выполнять простые арифметические действия, других математических навыков не требуется.

Термины, которые учащийся освоит

Курс покупки (валюты) – цена за единицу валюты, по которой банк покупает валюту у клиентов.

Курс продажи (валюты) – цена за единицу валюты, по которой банк продает валюту клиентам. Курс продажи всегда выше курса покупки.

Примеры и обсуждение задач

40. В обменном пункте курс покупки доллара США 64 рубля 56 копеек, а курс продажи 65 рублей 36 копеек. В пункт пришел клиент и обменял 150 долларов на рубли. Через некоторое время пришел другой клиент и купил 150 долларов. Какой доход получил обменный пункт от этих операций (в рублях)?

Решение. Разница между курсами составляет 80 копеек, то есть 0,8 рубля. Значит, при покупке и последующей продаже 150 долларов США обменный пункт получил доход $0,8 \cdot 150 = 120$ рублей.

Ответ. 120.

41. Федор Петрович из города N собирается поехать в Таиланд, где ему понадобится местная валюта – баты. Федор Петрович выяснил, что в городе N баты не продают, а в Таиланде не принимают и не обменивают рубли. Поэтому он решил купить доллары США или евро, а в Бангкоке, столице Таиланда, поменять их на баты. Используя данные таблицы, ответьте, в какой валюте ему выгоднее везти деньги в Таиланд – в долларах или евро? Под выгодой подразумевается возможность купить наибольшее количество батов, потратив одну и ту же сумму в рублях. В ответе укажите название валюты.

	Курс в России, руб.		Курс в Бангкоке, бат.	
	Доллар	евро	Доллар	евро
Курс покупки	64,12	70,60	34,23	41,02
Курс продажи	66,21	72,72	36,10	43,36

Решение. Рассчитаем, сколько батов можно купить, например, за 1000 российских рублей, используя в качестве промежуточной валюты доллары:

$$1000 : 66,21 \cdot 34,23 = 516,99 \text{ (с точностью до сотых).}$$

Если же использовать евро, то получается

$$1000 : 72,72 \cdot 41,02 = 564,08 \text{ (с точностью до сотых).}$$

Ответ: евро.

6.2. Безналичные расчеты. Банковские карты

Почему важно уметь решать такие задачи

Денежные расчеты все чаще проводятся без использования наличных денег. Люди расплачиваются за товары и услуги, получают зарплату, перечисляют средства другим людям и органи-

зациям и обходятся при этом без банкнот и монет. Широко распространенным средством безналичных расчетов являются пластиковые банковские карты.

Банковская карта «привязана» к банковскому счету, на который поступают и с которого списываются денежные средства. Для расчетов картой вам не нужны деньги в кошельке, но у вас должны иметься средства на счете в банке (или банк должен быть уверен, что они на этот счет поступят).

Расчеты банковской картой удобны, при этом ваши денежные средства лучше защищены по сравнению с наличными, которые вы носите в кошельке. Если вдруг вы потеряете карту или у вас ее украдут, нужно обратиться в банк. Банк сразу же заблокирует утраченную карту и выдаст вам взамен новую. Не зная специального PIN-кода, злоумышленники не смогут воспользоваться вашими деньгами. А вот потерянный кошелек вам, скорее всего, уже не вернут.

Кроме того, банковские карты помогают ускорять расчеты: продавцу не нужно считать и выдавать сдачу. Часто у продавца нет сдачи, и тогда начинаются переговоры: «найдите 14 рублей», «а у Вас помельче нет?», «сейчас сбегаю в соседний отдел, разменяю ваши пять тысяч»... Все это отнимает время. При оплате картой вам достаточно вставить ее в специальный терминал и ввести PIN-код, банк сразу же снимет сумму покупки с вашего счета и отправит ее на счет продавца (магазина).

Для того чтобы банки, выпускающие карты, и точки продаж, принимающие их к оплате, могли обмениваться информацией о совершаемых по карте операциях, а следовательно, владельцы карт могли ими пользоваться, существуют платежные системы. Самые известные международные системы: Visa и MasterCard, в России недавно появилась своя система «Мир».

Карты делятся на два основных типа: дебетовые и кредитные. При пользовании дебетовой картой вы можете потратить столько денег, сколько есть у вас на счете. Иногда банки допускают возможность перерасхода средств (овердрафта) в определенных пределах, но, как правило, берут за это значительные проценты.

При расчетах кредитной картой банк предоставляет вам деньги в кредит, причем не бесконечно, а до тех пор, пока вы не исчерпаете кредитный лимит – максимальную сумму, разрешенную банком. Банк также устанавливает срок, в который вы должны вернуть ему потраченные таким образом деньги и предоставляет льготный период, в течение которого плата за пользование кредитом не взимается. Если вы не вернете все потраченные деньги в льготный период, вам придется заплатить банку проценты за пользование ими. Разумеется, возвращать основной долг вам тоже придется – по установленному банком графику, выплачивая каждый раз часть долга и проценты с невозвращенной суммы. За нарушение этого графика банки часто взимают штрафы и повышают процентную ставку. Одним словом, кредитные карты дают дополнительные возможности, но одновременно предполагают большую ответственность.

Удобства, которые предоставляют банковские карты, не бесплатны. Владелец карты должен осознавать, какие расходы он понесет: сколько стоит годовое обслуживание карты и отдельные операции, например, снятие наличных в банкомате или перевод денег на счет другому человеку и т.п.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

Решая задачи по теме «Банковские карты», учащиеся должны научиться:

1. оценивать стоимость банковского обслуживания карты (ежегодная плата за обслуживание, комиссии за пользование банкоматами «своего» и «чужих» банков, за совершение транзакций и т.п.);
2. оценивать возможности совершения покупок с помощью кредитной карты исходя из данных о текущем доходе и (или) ожидаемых поступлениях;
3. оценивать величину процентов по кредиту, подлежащих уплате при использовании кредитной карты;
4. оценивать последствия овердрафта по дебетовой карте (в частности, при неосознанном, случайном его использовании);
5. оценивать состояние текущего счета на основании перечня транзакций по карте;

6. сопоставлять затраты на приобретение товаров и услуг за наличные и по банковской карте с учетом возможной разницы цен, а также комиссии за снятие наличных в банкомате;
7. понимать особенности списания средств со счета карты при покупках в иностранной валюте, оценивать величину затрат на конвертацию.

Необходимые сведения из курса математики

Учащийся должен уметь работать с процентами и дробями, выполнять простые арифметические действия, других математических навыков не требуется.

Термины, которые учащийся освоит

Банковская карта – это пластиковая карта, которую банк выдает гражданину для безналичных расчетов в точках продаж. Связана со счетом в том же банке. При выдаче карты банк заключает с ее владельцем договор, по которому обязуется совершать платежные операции от имени клиента (владельца карты), используя деньги с этого счета.

Дебетовая карта – карта, привязанная к текущему счету. Например, заработная плата обычно поступает на дебетовые карты.

Кредитная карта – карта, привязанная к кредитному счету. Позволяет ее владельцу использовать деньги банка на общую сумму, не превышающую установленный банком максимум (кредитный лимит), причем в льготный период – бесплатно, по его истечении – с уплатой банку процентов.

Банкомат – автомат, позволяющий получить наличные деньги со счета, привязанного к банковской карте, или, наоборот, положить на этот счет деньги, а также совершать различные платежные операции с картой или без нее.

Платежная система – компания, которая обслуживает расчеты по банковским картам определенного типа (Master Card, Visa, American Express, «Мир»). Не следует путать платежную систему и банк. Платежная система напоминает «супербухгалтера», учитывающего все операции с картами клиентов всех банков во всех магазинах, где принимается оплата картой данного типа.

Овердрафт – возможность перерасхода средств на карте. Это сумма, которую банк разрешает владельцу дебетовой карты потратить сверх того, что есть на его счете. Овердрафт – разновидность микрокредита с весьма жесткими условиями. При запросе баланса карты (остатка средств на счете) доступный владельцу карты овердрафт часто суммируется с его собственными средствами, лежащими на карте. Забыв об этом, владелец карты может случайно допустить перерасход, то есть воспользоваться овердрафтом неосознанно...

Банковская комиссия – сумма, которую банк списывает (снимает) со счета клиента в качестве платы за свои услуги, например, за выдачу денег в банкомате, отправку смс-уведомлений об операциях по карте, перевод денег клиенту другого банка или другие платные операции, указанные в договоре.

Льготный период – период, в течение которого клиент может погасить задолженность по кредитной карте без уплаты процентов. Обычно в льготный период включается месяц, в котором были потрачены деньги, и еще 20-30 дней после его окончания. В договоре с банком указывается максимальный срок (50-60 дней), однако если клиент совершит покупки в последний день месяца, то на возврат денег без процентов у него останется всего 20-30 дней, а не 50-60, как многим кажется после первого знакомства с рекламными буклетами банков.

Примеры решения и обсуждения задач

42. Тимофей давно мечтает о профессиональном зеркальном фотоаппарате. Модель, которая нравится ему больше всего, стоит 39 500 рублей. В ближайшем будущем Тимофей рассчитывает получить премию в размере 40 000 рублей, но ему не хочется ждать. Тимофей решил расплатиться за фотоаппарат кредитной картой. Если он вернет долг банку в течение льготного периода, то ему не придется платить проценты. Но если он выплатит долг позже, банк начислит проценты по ставке 24% годовых за весь срок пользования кредитом (со дня платежа в магази-

не до дня возврата денег). Тимофей совершил покупку за 20 дней до окончания льготного периода, а премию, вопреки ожиданиям, получил с опозданием, через 15 дней после окончания льготного периода по карте. Какую сумму процентов должен будет уплатить Тимофей? Хватит ли ему премии для того, чтобы полностью рассчитаться по кредиту (вернуть долг и выплатить проценты)?

Решение: Проценты за пользование кредитом составляют $39500 \cdot \frac{0,24}{365} \cdot 35 = 909$ рублей.

Значит, для погашения всего долга, состоящего из суммы покупки и процентов, Тимофею потребуется $39\,500 + 909 = 40\,409$ рублей. Премия составляет 40 000 рублей. Следовательно, ее не хватит, чтобы рассчитаться по кредиту.

Ответ: 909 руб.; премии не хватает.

Обсуждение. Обратим внимание школьников на то, что расчет полезен для принятия решения о покупке, но решающее правило, покупать или не покупать, у каждого человека свое. Разницу между полной суммой долга по кредиту и премией в 400 с лишним рублей кто-то сочтет существенной и не станет спешить с покупкой. А кому-то «переплата» (разница между стоимостью фотоаппарата и суммой, которую придется заплатить вместе с процентами) в 909 рублей может показаться вполне приемлемой, если камера нужна ему, к примеру, для съемки важного семейного события. Математика не диктует решения – она помогает принимать их осознанно.

43*. Галина использует для покупок дебетовую карту с овердрафтом (суммой возможного перерасхода средств) в размере 20 000 рублей. Процентная ставка по овердрафту составляет 20% годовых, проценты начисляются со дня использования овердрафта. При запросе остатка по счету овердрафт включается в общую сумму доступных средств (вместе с собственными деньгами владельца карты). Галина увидела, что на ее карте есть 25 000 рублей, и расплатилась за покупки на общую сумму 15 000 рублей. Больше года Галина картой не пользовалась и об этой операции забыла, но вдруг получила от банка сообщение о просроченной задолженности. В общей сложности Галина должна погасить задолженность банку за 372 календарных дня. Какую сумму, по расчетам банка, она должна заплатить? Ответ дайте с округлением до рублей.

Решение. На момент покупки собственные средства Галины на карте составляли 5 000 рублей, перерасход (овердрафт) составил $15000 - 5000 = 10000$ рублей. Проценты составили $10000 \cdot 0,2 \cdot \frac{372}{365} = 2038,36$ рублей. Таким образом, общая задолженность Галины перед банком равна 12 038 рублей.

Ответ: 2 038 рублей.

44. В туристической поездке в Европу Катя расплачивается за покупки банковской картой российского банка. В одном из магазинов в Берлине продавец предложил Кате выбрать валюту, в которой сумма покупки будет списана со счета ее карты. Если Катя выбирает списание суммы в рублях, то применяется курс конвертации немецкого продавца, а если в евро, то курс российского банка, выпустившего карту. Выбранный Катей товар стоил 175 евро, сумма к оплате в рублях составляла 13 125 рублей. Катя решила, что поскольку ее карточка выпущена российским банком, лучше рассчитываться в рублях. Права ли она, если известно, что курс евро, применяемый для конвертации российским банком, выпустившим карту, на дату покупки составлял 72,47 руб.?

Решение. Курс евро к рублю, применявшийся банком продавца, составлял $13125 : 175 = 75$ рублей за 1 евро, что выше, чем курс, применявшийся российским банком (72,47). Если бы Катя выбрала евро, то цена покупки в рублях составила бы $175 \cdot 72,47 = 12\,682,25$ рублей.

Ответ: Катя ошиблась.

Тема 7. Страхование

Почему важно уметь решать такие задачи

Жизнь каждого человека полна случайными событиями. Не все случайные события благоприятны; иногда они приносят существенный финансовый ущерб. К числу неприятных случайных событий относятся аварии, пожары, несчастные случаи. Бывают мелкие неприятности: незначительные травмы или болезни, повреждение автомобиля, затопление квартиры соседями и др. Чаще всего, мы недооцениваем эти риски и считаем, что это может случиться с кем угодно, но только не с нами. К сожалению, это не так. Для того чтобы снизить влияние случайных событий на жизнь и финансовое благополучие человека, семьи или компании, можно пользоваться страхованием.

Страхование – это финансовая услуга, с помощью которой можно покрыть значительные потери, наступившие в результате непредвиденных обстоятельств. Страховые компании вычисляют вероятность наступления того или иного события и на основании этих вычислений определяют стоимость страхования в каждом конкретном случае.

Обычно цена полиса (страховая премия) составляет малую часть от страховой выплаты – суммы, которая выплачивается при наступлении страхового случая.

Застраховать можно не только себя и своё имущество, но и ответственность перед другими. Например, ОСАГО (обязательное страхование гражданской ответственности автовладельца) – вид страхования, в рамках которого страховая компания выплачивает деньги тем, кто пострадал от действий застрахованного лица в случае ДТП.

В силу того, что мы не знаем вероятностей наступления неприятных событий, верным будет стандартное решение: «при возможности страхуйся».

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

В процессе изучения данной темы следует обращать внимание учащихся на следующие особенности.

1. Невозможно предвидеть неприятности, поэтому все, что касается страхования, связано с вероятностями.
2. Страховые компании собирают фактическую информацию о частоте наступления тех или иных событий и оценивают различные риски и математические ожидания выплат на основе закона больших чисел.

При решении задач важно обращать внимание на алгоритм подсчета и поиска экономической выгоды – чем выше вероятность наступления неблагоприятного события и ожидаемые потери, тем дороже страховка. При этом, если мы считаем наступление события практически невероятным (или ущерб от него несущественным), страхование не имеет особого смысла. К примеру, нет смысла страховать от конца света, вторжения инопланетян или укуса динозавра.

Алгоритм принятия решений по страхованию следующий (этот же алгоритм используется и при решении задач).

1. Попытаться оценить свой индивидуальный риск, например, с помощью интернета (статистика угонов автомобилей, частота пожаров или землетрясений в данной местности и т.п.).
2. Оценить математическое ожидание потерь от страхового случая.
3. Узнать стоимость страховки и сравнить ее с приемлемыми для себя расходами на страхование.
4. Если математическое ожидание потерь намного превосходит стоимость страхового полиса, то страхование желательно. Если же стоимость полиса сопоставима с ожидаемым

размером потерь, страховка не имеет смысла (нельзя рассчитывать всерьез на то, что самая лучшая страховая компания полностью покроет ваши убытки).

Разумеется, приобретение страховки, является финансовым благом. И, как и всякое благо, она доступна не всем. Огромное количество людей в России и во всем мире не могут позволить себе страхование имущества, поскольку просто не имеют денег на приобретение страхового полиса.

Следует сказать учащимся, что существуют обязательные виды страхования: ОМС (обязательное медицинское страхование), которое вроде бы бесплатное, но на самом деле его оплачиваем все мы – налогоплательщики – опосредованно через бюджет страны. Другой пример – ОСАГО. Третий пример – обязательное страхование жизни и здоровья выезжающих за рубеж: многие страны ставят такую страховку непременным условием выдачи визы или въезда на свою территорию, причем страховая премия может быть немалой. Например, при получении визы в Австрию путешественник должен застраховать недешевый риск «Травма при занятиях зимними видами спорта» даже в том случае, если он не собирается заниматься никаким спортом.

Важно обратить внимание учащихся на то, что статистические данные дают базу для прогнозов, которые позволяют страховым компаниям определить обоснованную цену страхового полиса. Но не следует полагаться на статистику при принятии индивидуального решения, страховаться или нет. В этом случае нужно учитывать индивидуальные факторы и полагаться на здравый смысл и естественную осторожность.

В целом, задачи на оценку страховых рисков и принятие решений о приобретении страховки можно отнести к изучению раздела «Вероятность и статистика».

Необходимые сведения из курса математики

Учащийся должен уметь работать с процентами и дробями, иметь представление о статистических методах оценки вероятностей событий, уметь находить математическое ожидание случайных величин по их распределениям.

Термины, которые учащийся освоит

Страхование – финансовая услуга, покрывающая полностью или частично ущерб в случае наступления страхового случая.

Страховой случай – неблагоприятное событие, предусмотренное договором страхования и приведшее к потерям или упущенным доходам, подлежащим покрытию за счет страховой выплаты.

Страховая премия – цена страхового полиса (договора страхования), которую уплачивает клиент.

Страхователь – клиент страховой компании, заключающий договор страхования.

Страховщик (страховая компания) – компания, оказывающая страховые услуги.

Обязательное страхование – платное или бесплатное страхование, являющееся комплементарной услугой, связанной с определенным правом или благом (ОСАГО обязательно для автовладельца, страхование гражданской ответственности перевозчика за причинение вреда жизни, здоровью, имуществу пассажиров – обязательно для транспортного предприятия, которое занимается пассажирскими перевозками).

КАСКО – страхование автомобилей или других средств транспорта (судов, самолётов, вагонов) от ущерба, хищения или угона.

ОСАГО (обязательное страхование автогражданской ответственности) – страхование владельца автомобиля от причинения вреда другим участникам дорожного движения. В случае если застрахованный по договору ОСАГО водитель, двигаясь на автомобиле, нанесет ущерб другим транспортным средствам или причинит вред их водителям и пассажирам или пешеходам, страховая компания выплачивает компенсацию пострадавшим. Сумма компенсации определяется реальным ущербом и ограничена лимитом ответственности (см. ниже).

Базовый тариф ОСАГО – сумма, от которой «отталкивается» страховая компания при определении страховой премии. Для расчета страховой премии по конкретному договору ОСАГО базовый тариф умножают на коэффициенты ОСАГО, которые зависят от характеристик автомобиля, водителей, допущенных к управлению им, и предполагаемых условий вождения. Базовый тариф устанавливает страховая компания единым для всех своих клиентов.

Коэффициент ОСАГО – множитель, повышающий или понижающий страховую премию по договору ОСАГО. При расчете страховой премии коэффициенты ОСАГО умножают на базовый тариф. Коэффициенты, используемые в задачах: коэффициент стажа и возраста водителя, мощности двигателя, сезонности вождения, региона эксплуатации автомобиля, коэффициент «бонус-малус»..

Коэффициент «бонус-малус» (КБМ) – коэффициент, влияющий на стоимость полиса автострахования. КБМ конкретного водителя понижается или повышается на каждый следующий год зависимости от аварийности его вождения в предыдущем году.

Лимит ответственности – установленная договором страхования максимальная сумма, которую страховая компания может выплатить пострадавшему (лицу, которому нанесен ущерб) в результате страхового случая. Стоимость ущерба, превышающую этот лимит, возмещает сам страхователь.

Страховой полис – документ, подтверждающий факт страхования и содержащий его условия.

Страховой риск – вероятность наступления страхового случая.

Франшиза — часть ущерба, не выплачиваемая (удерживаемая) страховой компанией при наступлении страхового случая.

Примеры решения и обсуждения задач

45. Иннокентий застраховался от смерти или потери работоспособности из-за несчастного случая. Страховая сумма (выплата, которую получит его семья в случае наступления страхового случая) 500 000 рублей, а стоимость полиса за год равна 0,37% от страховой суммы и должна выплачиваться равными суммами ежемесячно. Сколько Иннокентий платит за страховку каждый месяц?

Решение: $500000 \cdot 0,0037 : 12 = 154,17$ рубля.

Ответ: 154,17 рубля.

46. Марии 23 года, этим летом она получила водительские права (коэффициент по возрасту и стажу 1,7), она живёт в Екатеринбурге (региональный коэффициент 1,8) и за летнюю стажировку накопила денег на покупку автомобиля мощностью 80 лошадиных сил. (коэффициент по мощности 1,1). Мария никогда ранее не покупала ОСАГО (коэффициент за классность 1). Базовый тариф в страховой компании, в которую обратилась Маша, составляет 3 700 рублей. При расчете страховой премии базовый тариф умножается на все коэффициенты.

а) Рассчитайте цену полиса ОСАГО для Марии, если она планирует использовать машину в течение всего года (сезонный коэффициент 1).

б) Сэкономит ли Мария на страховке, если оформит полис на неограниченное количество водителей (в этом случае коэффициент по возрасту и стажу будет 1,8)?

Решение: а) Цена полиса равна $3700 \cdot 1,7 \cdot 1,8 \cdot 1,1 \cdot 1 = 11762,3$ рубля.

б) Коэффициент по возрасту и стажу вырастет, а значит, вырастет и стоимость полиса. Мария не сможет сэкономить таким образом.

Ответ: а) 11 762,3 руб.; б) нет.

Тема 8. Игры с денежными ставками

Почему важно уметь решать такие задачи

Лотереи, казино, игровые автоматы, тотализатор – разновидности игр, в которых участники вкладывают свои деньги и надеются получить выигрыш, существенно превышающий вложенную сумму. В честно организованных играх (там, где нет мошенничества) отдельные игроки время от времени такие выигрыши получают. Например, известно, что в популярных лотереях, проводимых Гослото («5 из 36», «6 из 45», «7 из 49») на выигрыши направляется 50% собранных денег. На сайте лотереи можно увидеть фотографии счастливых участников, которые выиграли от нескольких сотен тысяч и до десятков и даже сотен миллионов рублей.

Означает ли это, что лотерея или тотализатор – способ заработать деньги? Нет, это не так. Чем больше денег участник вкладывает в игру, тем увереннее он их проиграет.

Но как же!?! – скажете вы. – Отдельному человеку может улыбнуться удача, и выигрыш многократно превысит расходы, а вы говорите, что чем больше участник играет, тем увереннее он проигрывает.

Никакого противоречия нет. Выигрыши и проигрыши подчиняются закону больших чисел: совокупно все участники проигрывают организаторам. Поэтому иногда сыграть в лотерею можно, но ни в коем случае, лотерея не должна становиться попыткой решения финансовых проблем. Попытка выпутаться из финансовых трудностей, вкладывая последние деньги в игры, приведет к еще большим финансовым трудностям.

Игры на деньги всегда были окутаны романтической таинственностью, отсюда происходит большое количество мифов. Например, большинство «систем», позволяющих существенно повысить вероятность выигрыша игрока, разного рода «счастливые числа» и сочетания, на поверку оказываются несостоятельными. И убедиться в этом можно с помощью математики.

Теория вероятностей достаточно точно определяет параметры и результаты игры для большого количества участников, она может предсказать шансы и для одного участника. А вот если предсказанные результаты существенно отличаются от фактических, можно заподозрить, что игра идет «не по правилам», такой пример, правда литературный (по роману Д. Лондона «Смок Белью»), вы найдете ниже.

В общем, если вы верите в звезды, удачу, талисманы, счастливый случай – играйте, но только иногда и только в том случае, если у вас есть деньги, с которыми вы можете безболезненно расстаться.

Какие финансовые навыки нужно сформировать у учащегося

При решении и обсуждении задач следует показать, что, несмотря на случайный характер эксперимента, игры на деньги подчиняются математическим законам.

Следует показать, что выигрыш и проигрыш – осязаемые величины, которые можно оценивать с помощью характеристик случайных величин – математического ожидания и дисперсии. Важно показать, что любая лотерея имеет отрицательное математическое ожидание выигрыша, откуда следует, что чем больше игрок играет, тем больше он в среднем проигрывает.

Также следует обсудить и разобрать распространенные мифы:

1. *Чем больше играешь, тем больше выигрываешь.* Действительно, если игрок играет постоянно, то рано или поздно он получит выигрышную комбинацию. Но, во-первых, для этого, скорее всего, не хватит и целой жизни, а во-вторых, почти наверняка к этому моменту он совокупно проиграет гораздо больше.
2. *Статистика результатов тиражей — инструмент, который поможет вам чаще выигрывать.* Это неправда. Нет никаких «горячих» и «холодных» чисел в лотереях. Комбинация, только что выпавшая в очередном тираже, во всех следующих тиражах не стала ни более, ни менее вероятной.

3. *Существуют системы, позволяющие минимизировать вероятность проигрыша и хотя бы наверняка отыграться.* Да, существуют, но для того, чтобы эти стратегии сработали, требуются такие ресурсы и время, которых у игрока просто нет. Большинство тех, кто пытался использовать одну из таких систем, разорился прежде, чем система сработала.

Опровержение мифов об играх позволяет также сконцентрироваться на мысли о том, что игры на деньги не могут быть финансовым инструментом, улучшающим жизнь человека. Наконец, следует рассмотреть варианты «нечестных» игр, у которых реальная модель игры отличается от заявленной.

Необходимые сведения из курса математики

Учащийся должен уметь работать с процентами и дробями, иметь навыки вычисления числа сочетаний C_n^k , вероятностей событий в опытах с равновозможными исходами, уметь находить математическое ожидание и дисперсию случайных величин по их распределениям, иметь представление о законе больших чисел. Для вычислений полезно уметь пользоваться табличным процессором Excel.

Примеры решения и обсуждения задач

47. В лотерее «6 из 45» участник выбирает шесть любых номеров из сорока пяти идущих подряд от 1 до 45. Во время тиража определяется случайная выигрышная комбинация из шести номеров. Джекпот – максимальный выигрыш, который участник получает, если угадывает все шесть выигрышных номеров.

Распространено мнение, что у счастливого, выигравшего однажды джекпот, значительно меньше шансов выиграть джекпот в последующих тиражах, чем у того, кто прежде джекпот не выигрывал. Верно ли это?

Ответ: это неверно, поскольку выигрыши в различных тиражах – события независимые.

48. По результатам анализа 20 последовательных тиражей в лотерее «6 из 45» выяснилось, что в выигрышных комбинациях число 31 встречалось в 3 раза чаще, чем число 34. Делая ставку в очередном тираже, игрок решил вместо числа 34 поставить число 31. Увеличилась ли у игрока вероятность получить выигрыш в данном тираже?

Решение. Выпадение любых номеров в различных тиражах – события независимые, следовательно, на вероятность выпадения в выигрышной комбинации числа 31 или числа 34 результаты предыдущих тиражей не влияют. Таким образом, включение в ставку числа 31 вместо числа 34 вероятность получить выигрыш не увеличивает и не уменьшает.

Ответ: нет.

49*. В лотерее «5 из 36» участник выбирает пять номеров из тридцати шести идущих подряд от 1 до 36. Во время тиража определяется случайная выигрышная комбинация из пяти номеров. Лотерея «6 из 29» устроена аналогично: разыгрываются шесть случайных номеров из двадцати девяти.

Джекпот – максимальный выигрыш, который получает участник в случае, если угадал все выигрышные номера. Минимальный выигрыш – событие, при котором участник угадал ровно два выигрышных номера.

а) Игрок хочет выбрать лотерею, в которой вероятность получить джекпот выше. Какая из двух лотерей отвечает этому требованию?

б) В какой из этих лотерей у конкретного игрока выше вероятность получить минимальный выигрыш?

Решение. а) В лотерее «5 из 36» вероятность джекпота равна

$$\frac{1}{C_{36}^5} = \frac{1}{376922}.$$

В лотерее «6 из 29» эта вероятность еще меньше:

$$\frac{1}{C_{29}^6} = \frac{1}{475020}.$$

б) Найдем вероятность угадать ровно два числа в лотерее «5 из 36». Количество равновозможных комбинаций с двумя выигрышными и тремя невыигрышными числами равно $C_5^2 \cdot C_{31}^3 = 44950$. Общее число комбинаций равно $C_{36}^5 = 376922$. Значит, вероятность угадать ровно два номера из пяти равна

$$\frac{C_5^2 C_{31}^3}{C_{36}^5} \approx 0,119.$$

В лотерее «6 из 29» вероятность угадать ровно два номера ищется аналогично:

$$\frac{C_6^2 C_{23}^4}{C_{29}^6} \approx 0,280.$$

Ответ: а) «5 из 36»; б) «6 из 29».

Примечание. Для нахождения чисел C_n^k формула $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ неудобна, поскольку числа в задачах про лотереи большие. Лучше пользоваться программой Excel, которая имеет встроенные функции. Например,

$$C_{36}^5 \text{ вычисляется с помощью формулы } = \text{ЧИСЛКОМБ}(36;5).$$

Выражение $\frac{C_6^2 C_{23}^4}{C_{29}^6}$ можно вычислить, последовательно находя все компоненты, но можно воспользоваться одной функцией

$$= \text{ГИПЕРГЕОМЕТ}(2;5;5;36)$$

(угадано 2 из 5 выигрышных, если всего выигрышных 5 из 36).

50.** Тиражи лотереи «6 из 45» проводятся ежедневно два раза в день. Предположим, что в каждом тираже делается 100 000 ставок (игроков может быть меньше, поскольку каждый может сделать больше одной ставки). Какова вероятность, что джекпот будет выигран хотя бы одним игроком хотя бы раз в течение апреля?

Решение: Чтобы не путаться в игроках и ставках, будем считать, что каждый игрок делает ровно одну ставку, то есть в каждом тираже ровно 100 000 игроков. Вероятность того, что конкретный игрок (игрок А) выиграет джекпот в первом тираже равна

$$p = \frac{1}{C_{45}^6} = 1 : 8145060 \approx 0,000000122773804.$$

Такая высокая точность нужна для того, чтобы не потерять точность в дальнейшем при возведении в степень с большими показателями.

Следовательно, вероятность того, что игрок А не выиграет джекпот в течение апреля (60 независимых и одинаковых тиражей), равна

$$(1 - p)^{60} = 0,999999877226196^{60} = 0,99999263359844.$$

Но таких участников 100 000. И они все независимы. Поэтому вероятность того, что джекпот не будет выигран в апреле никем, равна

$$\left((1-p)^{60}\right)^{100000} = 0,99999263359844^{100000} \approx 0,479.$$

Здесь мы округлили до тысячных, поскольку большая точность уже не нужна. Таким образом, вероятность того, что в апреле джекпот все же будет кем-то выигран, равна

$$1 - (1-p)^{100000 \cdot 60} \approx 0,521$$

Ответ: прикл. 0,521.

Обсуждение. Эта группа задач про лотереи, где нужно угадать заранее сколько-то чисел, довольно важна, поскольку такие лотереи распространены во всем мире. В Советском Союзе была популярна лотерея «Спортлото», сейчас так устроены многие лотереи Гослото. Требуется обратить внимание школьников на два факта:

1. Вероятность того, что главный выигрыш достанется кому-то из игроков (неважно, кому), весьма высока: мы получили в наших предположениях 0,521.
2. Вероятность того, что главный выигрыш достанется именно тебе, ничтожно мала: в нашем примере

$$1 - 0,99999263359844 \approx 0,00000737.$$

Чтобы выиграть «практически наверняка», скажем, с вероятностью не менее $\alpha = 0,95$, потребуется играть 24 400 418 раз, поскольку

$$\log_{1-p}(1-\alpha) = \log_{0,999999877226196} 0,05 = 24400417,61.$$

Играть в лотерею 24 миллиона раз весьма накладно. Конечно, компьютерный робот с этим справится, проблема лишь в том, что когда такой настойчивый игрок выиграет свой джекпот, он обнаружит, что к этому моменту проиграл гораздо больше денег, чем выиграл.

Обсудите со школьниками, что произойдет, если игрок решит сделать все возможные ставки в одном тираже. Их столько, сколько комбинаций: 8 145 060, при этом джекпот гарантирован, но денег на участие будет потрачено заведомо больше, чем выигранная сумма.

Ясно, что и в этой задаче все вычисления проводятся с помощью Excel.

51.** Правила лотереи-спринт (где нужно стереть на билетике краску с закрытых областей) опубликованы. Всего выпущено 10 000 билетиков. 25% билетиков имеют выигрыш, равный цене билетика, 500 билетиков несут выигрыш 500 рублей, 10 билетиков дают выигрыш 1000 рублей, один билетик дает главный выигрыш – 10 000 рублей.

- а) Найдите минимальную цену билетика (целое число рублей), при которой математическое ожидание дохода организатора лотереи от продажи одного билетика не менее 10 рублей.
- б) Найдите математическое ожидание выигрыша игрока на один билетик при цене билета, найденной в пункте а.

Решение. Пусть цена билетика равна X рублей. Построим распределение дохода организатора от продажи одного билетика:

$$X \sim \begin{pmatrix} x & 0 & x-500 & x-1000 & x-10000 \\ 0,6989 & 0,25 & 0,05 & 0,001 & 0,0001 \end{pmatrix}$$

Найдем математическое ожидание:

$$\begin{aligned} E X &= 0,6989x + 0,25 \cdot 0 + 0,05(x-500) + 0,001(x-1000) + 0,0001(x-10000) = \\ &= 0,75x - 27. \end{aligned}$$

Эта величина должна быть не меньше 10 рублей:

$$0,75x - 27 \geq 10, \text{ откуда } x \geq 49\frac{1}{3}.$$

Следовательно, минимальная цена 50 рублей.

б) Игроку важен не доход от лотереи, а его собственный выигрыш, который в точности равен «антидоходу» организатора. Поэтому выигрыш покупателя билета будет равен $27 - 0,75x$. При цене билета 50 рублей покупатель «выигрывает» в среднем $27 - 0,75 \cdot 50 = -10,5$ рублей.

Ответ: а) 50 рублей; б) $-10,5$ рублей.

Обсуждение. Мы специально включили цену билета в сумму «выигрыша» покупателя билета, чтобы показать, что математическое ожидание выигрыша на самом деле отрицательно. Так устроены все лотереи, и иначе быть не может – иначе лотерея не приносит дохода.

Следующая группа задач проиллюстрирует беспочвенность идей играть по какой-то системе, которая наверняка или хотя бы с большой вероятностью даст выигрыш.

52*. В интернете опубликован способ выбора номеров, который, по утверждению автора, существенно повышает вероятность выигрыша в лотерею «6 из 45». Автор считает, что «среди выигрышных комбинаций закономерно чаще встречаются комбинации с 3 четными числами и 3 нечетными числами, чем комбинации с другим соотношением четных и нечетных чисел. Следовательно, игрок, который выбирает 3 четных и 3 нечетных номера, имеет больше шансов на выигрыш, чем игрок, который делает совершенно случайную ставку».

а) Верно ли, что комбинации с 3 четными и 3 нечетными числами встречаются чаще, чем комбинации, с любым другим соотношением четных и нечетных чисел?

б) Верно ли, что игрок, выбирающий 3 четных и 3 нечетных номера, имеет преимущество по сравнению с игроком, поступающим не так?

Ответ: а) верно; б) нет.

Обсуждение. Решение этой задачи не составляет труда: действительно, вероятность комбинации с тремя четными и тремя нечетными равна $\frac{C_{22}^3 C_{23}^3}{C_{45}^6} \approx 0,335$, что заметно больше вероятности

комбинации с одним, двумя, четырьмя, пятью или шестью четными, или вообще без них (но меньше, чем все эти вероятности вместе взятые). С другой стороны, все комбинации равновозможны, независимо от того, сколько в них четных и нечетных номеров. Поэтому «способ» не работает.

53*. Известна система управления ставками под названием мартингейл. Суть системы – при конкурентной игре увеличивать ставку так, чтобы при выигрыше покрыть все свои предыдущие потери. Простейший пример выглядит так. Двое играют в орлянку. Если выпадает орел, то выигрывает игрок А, если выпадает решка, то выигрывает Б. Начальная ставка 1 рубль. Б решает играть по простейшей из стратегий типа мартингейл: в случае проигрыша во второй раз он поставит 2 рубля. Если он выиграет, то вернет проигранный рубль и получит еще один рубль сверх того. Если проиграет и во второй раз, то в третий раз поставит 4 рубля. В случае выигрыша он вернет свои $1 + 2 = 3$ рубля проигрыша и получит еще рубль. И так далее: каждый в случае проигрыша должен удваивать ставку вплоть до выигрыша. Правда ли, что придерживаясь такой стратегии, игрок Б гарантированно выиграет один рубль?

Решение. Последовательность выигрышей и проигрышей игрока Б легко закодировать нулями и единицами: 1 – выигрыш, 0 – проигрыш. Например, возможна такая серия игр:

00001

Человеку свойственно недооценивать длину серии случайных проигрышей, то есть серию нулей в такой последовательности. Нам кажется, что чем больше проигрышей случилось, тем ближе выигрыш. Но это только кажется. Здесь и кроется ошибка игрока. Поэкспериментируйте, подбрасывая монету или с помощью Excel (функция =СЛУЧМЕЖДУ(0;1)). Довольно быстро у вас случится что-то вроде

00000010001.

Это значит, что при удвоении ставок игрок Б перед первым своим выигрышем проиграет игроку А 63 рубля. А если у игрока Б в начале игры было всего лишь 100 рублей, то он уже не сможет удвоить ставку в седьмой раз, а в случае седьмого проигрыша безвозвратно теряет все.

Ответ: нет.

Обсуждение. В конкурентной игре такого рода все шансы на стороне того, у кого вначале больше ресурсов – денег. Например, при игре с казино, у которого несравнимо больше денег, чем у любого отдельного игрока, рано или поздно игрок разорится полностью, какой бы системы он ни придерживался. Это утверждает математика – закон больших чисел. Это произойдет обязательно, если игрок играет много, например, если он входит в азарт, пытаясь отыграться.

Не самой важной теме «Игры» в результате мы посвятили довольно много места. Это потому, что игры являются неотъемлемой частью человеческой жизни, а еще потому, что в России, да и во всем мире люди проигрывают огромные деньги в лотереи разного рода. Существуют государства, где привлечение населения к лотереям является своего рода основным источником пополнения казны.

Вряд ли задача учителя призывать или отговаривать школьника участвовать в играх с денежными ставками: каждый вправе верить в счастливый случай, талисман или заветную комбинацию чисел (и большие выигрыши в честных играх случаются). Но важно показать, как работают законы вероятности, в частности закон больших чисел, и почему игра в лотерею не может быть инвестицией, надежным заработком или способом спастись от долгов.