Open Открытый
Mathematical Математический
Tournament Турнир

РАЗБОР ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА ОТКРЫТОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТУРНИРА

21-24 ноября 2017 г.

1. ЗАДАЧА ОБ ИЗМЕРЕНИИ ЗЕМЛИ ЭРАТОСФЕНОМ	КЛАСС
	5 6 7 8 9

Однажды Аркаша, проводя летние каникулы на даче у дедушки, нашел в библиотеке старую потрепанную книгу. Открыв ее на случайной странице, Аркаша прочитал следующее.

«Эскперимент Эратосфена Киренского Эратосфен Киренский (276 год до н.э.— 194 год до н.э.) — греческий математик, астроном, географ и поэт. С раннего возраста он жил в Александрии, здесь он и получил образование под руководством своего учёного земляка Каллимаха, стоявшего во главе александрийской библиотеки.

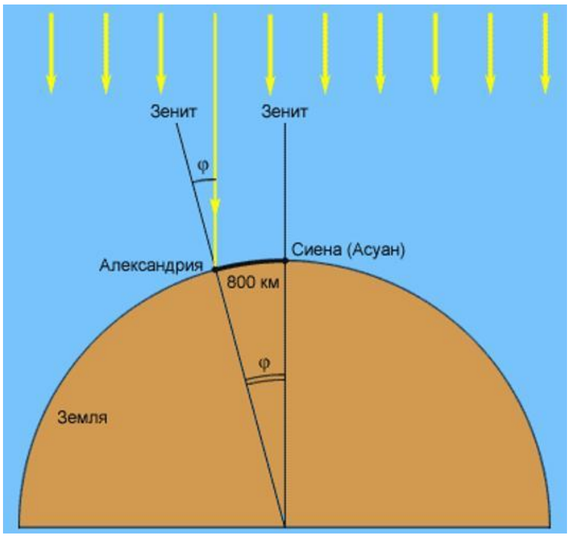
Неудовлетворенный познаниями, приобретёнными в Александрии, Эратосфен отправился в Афины, где так тесно сблизился со школой Платона, что обыкновенно называл себя платоником. Результатом изучения наук в этих обоих центрах древнегреческого просвещения была очень разносторонняя, почти энциклопедическая эрудиция Эратосфена; он писал, кроме сочинений по математике, астрономии, геодезии, географии и хронологии, ещё трактаты «о добре и зле», о комедии и др.

Царь Птолемей III Эвергет тотчас же после смерти Каллимаха вызвал Эратосфена из Афин и поручил ему заведование великой Александрийской библиотекой. Эрастофен — автор многих трудов по математике, астрономии, геодезии, географии.

Один из интересных фактов жизни Эратосфена – вычисление радиуса Земли.

Древние египтяне заметили, что во время летнего солнцестояния Солнце освещает дно глубоких колодцев в Сиене (ныне Асуан), а в Александрии — нет. Эратосфен использовал этот факт для измерения окружности и радиуса Земли. В день летнего солнцестояния в Александрии 19 июня 240 года до н.э. он применил скафис (чашу с длинной иглой), при помощи которого можно было определить под каким углом Солнце находится на небе.

После измерения угол оказался [неразборчиво], то есть [неразборчиво] часть окружности. Стало быть, Сиена отстоит от Александрии на [неразборчиво] часть окружности Земли. Тогда радиус Земли будет равен… [неразборчиво].»



Далее ветхие страницы читать было совсем сложно, а числа были пропечатаны плохим шрифтом и совсем истерлись. Но искушенный в решении сложных задач Аркаша решил заполнить пробелы в этой статье. Воспользовавшись атласом, Аркаша нашел расстояние от Асуана до Александрии. Кстати, в Египте это расстояние считали равным 5000 стадиям (старая мера длины). За 1 стадий Аркаша взял 209,4 м. Угол, который измерил Эратосфен, был плохо виден, проглядывалось число в 9 градусов.

Какой радиус Земли при таких данных получил Аркаша? Ответ дайте в метрах. (Значение "пи" примите равным 3,14, ответ округлите до тысячных.)

Решение

Расстояние от Асуана до Александрии в метрах:

$5000 * 209{,}4 \ = \ 1047000$ м.

9 градусов составляют 1/40 часть от длины окружности. Таким образом:

$1047000 \ = \ 1/40$ длины окружности. Вся окружность составляет:

$$l = 40 * 1\,047\,000 \ = \ 41\,880\,000 \text{ м.}$$

Отсюда радиус Земли:

$$\frac{l}{2\pi} = \frac{41880000}{6{,}28} = 6668789{,}809 \text{ м.}$$

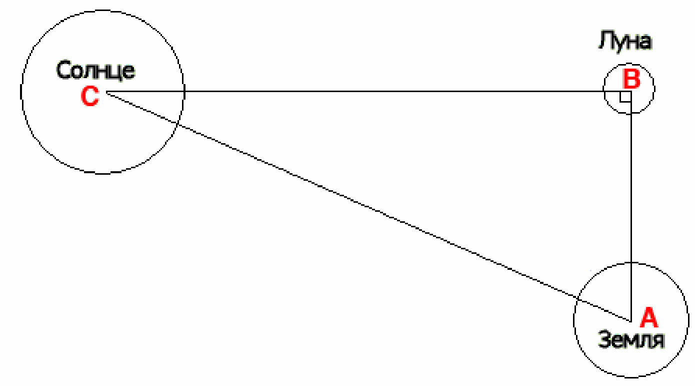
Ответ: 6668789.809

2. ЗАДАЧА АРИСТАРХА САМОССКОГО	КЛАСС
	10 11

Однажды Аркаша, проводя летние каникулы на даче у дедушки, нашел в библиотеке старую потрепанную книгу. Открыв ее на случайной странице, Аркаша прочитал следующее.

«…до нас дошло только сочинение Аристарха Самосского «О величинах и расстояниях Солнца и Луны» (III в. до н. э.), где он впервые в истории науки попытался установить расстояния до этих небесных тел и их размеры.

К решению этого вопроса Аристарх подошел очень остроумно. Он исходил из предположения, что Луна имеет форму шара и светит отраженным от Солнца светом. В этом случае, в те моменты, когда Луна имеет вид полудиска, она образует прямоугольный треугольник с Землей и Солнцем:



Если в этот момент точно определить угол между направлениями с Земли на Луну и на Солнце (CAB), можно из простых геометрических соотношений найти, во сколько раз катет (расстояние от Земли до Луны AB) меньше гипотенузы (расстояния от Земли до Солнца AC). По Аристарху, CAB=[неразборчиво]°; следовательно, соотношение этих сторон [неразборчиво].»

Далее ветхие страницы читать было совсем сложно, а числа были пропечатаны плохим шрифтом и совсем истерлись. Но искушенный в решении сложных задач Аркаша решил заполнить пробелы в этой статье и посчитать, во сколько раз Солнце по расчетам Аристарха находится дальше от Земли, чем Луна.

В качестве измеренного Аристархом угла Аркаша принял 88 градусов.

Какую часть, по его прикидкам в этом случае, составляет расстояние от Земли до Луны от расстояния от Земли до Солнца? Ответ округлите до тысячных. При вычислениях можно пользоваться инженерным калькулятором.

Решение

Решение сводится к нахождению косинуса угла, измеренного Аристархом.

Ответ: 0.035

3. РЫЦАРИ И ЛЖЕЦЫ	КЛАСС
	5 6 7 8

5-6 класс

3.1. В некотором городе живут 200 человек, половина из которых всегда говорят правду (рыцари), а другая половина - всегда лжет (лжецы). Каждый горожанин дружит хотя бы с одним другим горожанином. Однажды на собрании города ровно половина жителей назвали всех своих друзей рыцарями, а другая половина назвала всех своих друзей лжецами. Найдите наименьшее возможное число пар "рыцарь-лжец".

Ответ: 50.

Решение

Рассмотрим произвольного жителя А города, назвавшего всех своих друзей лжецами. Если А – правдив, то его друг – лжец. Если А – лжец, то его друг – рыцарь. В любом случае мы имеем пару «рыцарь-лжец», в которую входит А. Так как такое высказывание сделали 100 человек, то количество таких пар не может быть меньше, чем 100 : 2 = 50.

Пример: пусть 50 рыцарей дружат между собой, 50 лжецов дружат между собой, и есть 50 пар друзей вида "рыцарь – лжец", причём других друзей у жителей из этих пар нет. Тогда каждый из первых двух групп вправе сказать: "Все мои друзья – рыцари", а каждый из третьей группы: "Все мои друзья – лжецы".

3.2. Класс состоит из 65 учеников, причем у каждого могут быть друзья-одноклассники. Каким может быть наибольшее число девочек в этом классе, если у всех них разное количество друзей-мальчиков?

Ответ: 33.

Решение

Если в классе 33 девочки, то количеством друзей-мальчиков из этого класса может быть любое целое число от 0 до 32 (33 различных варианта), что не противоречит условию. В случае, если девочек будет больше 33 (хотя бы 34), то мальчиков в классе будет не больше 31, а значит, различных вариантов количества друзей-мальчиков будет не больше, чем 32 (от 0 до 31), и хотя бы у двух девочек окажется одно и то же количество друзей-мальчиков, что противоречит условию.

7-8 класс

3.3. 50 человек, каждый из которых рыцарь или лжец, встали в круг, после чего двое из них сказали, что "Оба моих соседа - лжецы", остальные же заявили, что "Оба моих соседа - рыцари". Сколько рыцарей может быть среди всех? (В ответе запишите сумму возможных значений).

Ответ: 3.

Решение

Очевидно, что из присутствующих не все – рыцари, и не все – лжецы, тогда никто из них не произнес бы первую фразу.

Рассмотрим одного рыцаря: один из соседних с ним лжецов может сказать первую фразу, а другие лжецы – вторую, что является примером единственного рыцаря.

Рассмотрим двух рыцарей, стоящих на противоположных местах стола – тогда все лжецы могут сказать вторую фразу. Это даёт пример двух рыцарей.

То, что рыцарей не более двух, можно доказать по-разному.

<u>Первый способ.</u> Предположим, что есть два рыцаря, сидящих рядом. Пойдём от них по кругу и дойдём до первого лжеца. Тогда мы найдём комбинацию РРЛ; но в этом случае рыцарь посередине не может произнести ни одну из фраз. Противоречие. Следовательно, каждый рыцарь окружен лжецами. Но в таких условиях каждый рыцарь произнесет первую фразу. Следовательно, рыцарей не больше двух.

<u>Второй способ.</u> Предположим, какой-то рыцарь сказал вторую фразу. Тогда оба его соседа – рыцари. Рассмотрим его соседа справа. Он рыцарь, и слева от него сидит рыцарь. Он не может солгать, сказав первую фразу, и должен сказать, что оба его соседа – рыцари. Тогда рассмотрим его соседа справа; и так далее. Получается, что все присутствующие за столом – рыцари, чего быть не может. Значит, все присутствующие рыцари обязаны говорить первую фразу, а таких фраз всего две. Значит, рыцарей не более двух – один или два.

3.4. 70 человек водили хоровод на новогоднем утреннике, причем 13 из них были в красных колпаках, а остальные - в синих. После этого каждому задали вопрос, был ли сосед справа в синем колпаке, на который правильно ответили только те, у кого оба соседа были в одинаковых колпаках. Сколько человек ответили на вопрос "да"?

Ответ: 57.

Решение

Рассмотрим любого участника хоровода. Цвета колпаков его соседей слева и справа могли быть такими: синий – синий, синий – красный, красный – синий, красный – красный. Участник отвечает "да" только в первых двух случаях; то есть ровно в тех случаях, когда его сосед слева – в синем колпаке.

Но сосед слева был в синем колпаке ровно у 57 участников, поэтому ответ "да" прозвучал 57 раз.

9-10-11 класс

3.5. 2017 рыцарей и лжецов выстроились в круг, каждый из них получил свое уникальное число. Ознакомившись с числами соседей, каждый заявил, что его число превышает числа его соседей. После этого k человек сказали, что их число меньше чисел каждого из двух соседей. Найдите наибольшее возможное k.

Ответ: 2015.

Решение

Пусть некоторым A и B, стоящим в круге, достались самое большое и самое маленькое числа соответственно. Так как они оба сказали первую фразу, то A – рыцарь, а B – лжец. Потому никто из них не мог произнести вторую фразу. Следовательно, $k \leq 2015$.

Случай, когда оставшиеся 2015 человек скажут вторую фразу, возможен, например, когда сидящим за столом достались (по часовой стрелке) карточки с числами 1, 2, 3, ..., 2017; при этом карточка с числом 2015 досталась рыцарю, а остальные – лжецам. Тогда первую фразу могут сказать все, а вторую – все, кроме людей с карточками 1 и 2017.

4. ВЗВЕШИВАНИЯ	КЛАСС
	5 - 11

5-6-7 класс

4.1. У Аркаши есть чашечные весы без гирь и 3 / 4 / 9 внешне одинаковых слитка (ов), один из которых фальшивый и отличается по весу (неизвестно, в какую сторону), другие же два по весу равны. За какое минимальное число взвешиваний можно определить фальшивый слиток?

Ответ: 2 / 2 / 3.

Решение

Пусть у нас 3 слитка. Покажем, что для определения фальшивого достаточно 2х взвешиваний. Кладём на каждую чашу весов по одному слитку. Если весы не в равновесии, значит, слиток, который остался, — настоящий. Кладём его на весы с любым из остальных и сразу определяем, какой из них фальшивый. Если же весы в равновесии, значит, фальшивый слиток – тот, который остался, и вторым взвешиванием можно даже определить, легче он или тяжелее, чем настоящие.

Если у нас 4 слитка, опять достаточно двух взвешиваний. Разделим наши слитки на две кучки по 2 слитка и положим одну из кучек на весы — по слитку на каждую чашу. Если весы в равновесии, то оба слитка на них – настоящие. Если весы не в равновесии, то оба слитка на столе настоящие. Итак, теперь мы знаем, в какой кучке лежит фальшивый слиток. Положим на одну чашку весов слиток из кучки, где оба настоящие, на вторую — слиток из кучки, где фальшивый. Если при этом весы будут в равновесии, значит, фальшивый слиток остался на столе, а если не в равновесии, значит, мы положили его на весы (в этом случае мы даже узнаем, легче он или тяжелее).

Если у нас 9 слитков, потребуется три взвешивания. Делим слитки на три кучки по 3 слитка и кладём две из них на чаши весов. Если весы в равновесии, то в оставшейся кучке находится фальшивый слиток, и за два взвешивания (как это показано в случае 1 этой задачи) мы определим фальшивый слиток. Итак, всего нам понадобится три взвешивания. Пусть теперь весы не будут в равновесии, значит, одна из кучек на весах — с фальшивым слитком, а в той кучке, которая осталась, только настоящие. Кладём на весы эту кучку и любую из первых двух. Так мы найдём не просто кучку с фальшивым слитком, но и сразу определим, легче он или тяжелее настоящих. Мы проделали два взвешивания, но зато теперь уже только одним взвешиванием (как показано в случае 1 этой задачи) можем определить фальшивый слиток. Итак, всего нам понадобится три взвешивания.

4.2. Аркаша купил набор с гирьками для своих чашечных весов, причем каждая весит нецелое число грамм. Аркаша может уравновесить с их помощью любой вес от 1 до 40 грамм (гири кладут на одну и чаш, вес - на другую). Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе Аркаши.

Ответ: 7.

Решение

Пример 1. Возьмём гири в 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43 г. Первыми двумя можно взвесить любой целый вес до 2 г. Значит, первыми тремя – до 5 г, четырьмя – до 10 г, пятью – до 21 г, шестью – до 42 г, семью – до 85 г. Уменьшим вес каждой гири в два раза. Теперь все гирьки весят нецелое число грамм, и ими можно взвесить любой целый или полуцелый вес от 0,5 до 42,5 г.

Пример 2. Гирями 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 г можно взвесить любой целый вес до 127 г. Оставим от каждой гири лишь треть. Веса гирек станут нецелыми, и ими можно будет взвесить любой целый вес до 42 г.

Оценка. Предположим, что в наборе 6 гирь. Различных поднаборов: $2^6 = 64.$ Покрасим одну гирю в жёлтый цвет и разобьём поднаборы на пары, отличающиеся только наличием в них жёлтой гири. Т.к. веса парных поднаборов отличаются нецелым весом жёлтой гири, то только один из них имеет целый вес в граммах. Поэтому поднаборов с целым весом не более 32, и 40 различных целых весов этим набором гирь не набрать.

4.3. В копилке у Аркаши есть некоторое количество монет, таких, что среди любых 3х обязательно найдется монета достоинством 1 рубль; достав же 4 монеты, всегда найдется монета достоинством 2 рубля. Аркаша достал 5 монет - какого они номинала (в ответе запишите сумму их номиналов)?

Ответ: 1+1+1+2+2=7.

Решение

Если из любых трёх монет всегда найдётся монета "1 рубль", то монет другого достоинства не больше двух. Если из любых четырёх монет всегда найдётся монета "2 рубля", то монет, отличных от "2 рублей", не больше трёх. Таким образом, из любых 5 монет всегда найдутся 3 монеты "1 рубль" и 2 монеты "2 рубля", поэтому все монеты перечислены. Добавление к полученному набору любой другой монеты даёт возможность достать из кармана набор из 5 монет, отличающийся от заданного условия.

5. ДЕЛИМОСТЬ	КЛАСС
	5 - 11

5-6-7 класс

5.1. Аркаша записал 4х-значное число, ни одна цифра которого не повторяется и которое делится на 2,5,9 и 11. Оказалось, что записанное число – наибольшее из возможных, удовлетворяющих названным правилам. Какое число записал Аркаша?

Ответ: 8910

Решение

У чисел 2, 5, 9 и 11 нет общих делителей, поэтому, если число делится на каждое из них, то оно делится и на их произведение. То есть искомое число делится на $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 = 990$.

Запишем все четырёхзначные числа, делящиеся на 990:

1980, 2970, 3960, 4950, 5940, 6930, 7920, 8910, 9900.

Наибольшее из них равно 9900, но у него есть совпадающие цифры. А наибольшее, у которого все цифры различны – это 8910.

5.2. Аркаша разложил 109 елочных игрушек по мешкам, в некоторых из которых – по x игрушек, а в остальных – по 3 игрушки. Всего мешков оказалось 20. Чему может равняться x? В ответе запишите сумму всех возможных значений.

Ответ: 62.

Решение

Если бы в каждом мешке было по 3 игрушки, то всего игрушек было бы 60. Но игрушек на 49 больше, значит, "лишние" игрушки надо распределить поровну по некоторым мешкам. Так как $49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1$ и всего мешков – 20, то либо в 7 мешках содержится по 7 "лишних" игрушек, либо в одном – 49 "лишних".

В первом случае $x = 10$, во втором – $x = 52$.

7-8-9 класс

5.3. Даша в зоопарке наблюдала за тем, как кормят мартышек в вольере. Сначала им принесли несколько бананов, из которых в первый раз 10 были съедены, причем все ели поровну (и необязательно каждая ела целое число бананов). Во второй раз пришли не все – 7 мартышек доели оставшиеся бананы, причем каждая съела в два раза меньше, чем накануне. Сколько бананов принесли первоначально?

Ответ: 11.

Решение

Пусть всего было k мартышек (k > 7), тогда каждая съела в первую ночь по 10/k бананов. Во вторую ночь каждая мартышка съела вдвое меньше, то есть 5/k бананов. Все 7 мартышек съели тем самым 35/k бананов. Это целое число. Единственный делитель числа 35, превышающий 7, — само число 35. Поэтому 35/k = 1, и всего в начале было 10 + 1 = 11 бананов.

10-11 класс

5.4. При каком наименьшем x число $x! = 1 * 2 * \ldots * x$ делится без остатка на 990?

Ответ: 11.

Решение

Число $11! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$ делится на $9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$. При $n! < 11$ число $n!$ не делится даже на 11.

5.5. Найдите количество несократимых дробей вида $\frac{2015}{a}$, удовлетворяющих неравенству:

$$\frac{1}{2016} < \frac{2015}{a} < \frac{1}{2015}$$

Ответ: 1440

Решение

Пусть a > 0 – знаменатель искомой дроби, тогда

$$\frac{1}{2016} < \frac{2015}{a} < \frac{1}{2015} \Leftrightarrow 2015^2 < a < 2015 \cdot 2016$$
$$\Leftrightarrow 2015^2 < a < 2015^2 + 2015.$$

Следовательно, искомые значения a – это числа вида

$$2015^2 + n,$$

где n – натуральное, $1 \leq n \leq 2014$ и $\text{НОД}(2015; n) = 1$.

Так как $2015 = 5\cdot13\cdot31$, то значения n, не удовлетворяющие условию, это все натуральные числа из указанного промежутка, кратные хотя бы одному из простых множителей в этом разложении.

Найдем их количество:

кратных 5 будет $13\cdot31 - 1 = 402$ (так как вычитается само число 2015),

кратных 13 будет $5\cdot31 - 1 = 154$,

а кратных 31 будет $5\cdot13 - 1 = 64$.

При этом числа, кратные сразу двум простым множителям разложения, будут учтены дважды (чисел, учтенных при таком подсчете трижды, в указанном промежутке нет). Итак, чисел, кратных и 5, и 13 (то есть кратных $5\cdot13$), будет $31 - 1 = 30$, чисел, кратных и 5, и 31, будет $13 - 1 = 12$, а чисел, кратных и 13, и 31, будет $5 - 1 = 4$.

Таким образом, искомое количество дробей равно

$$2014 - 402 - 154 - 64 + 30 + 12 + 4 = 1440.$$

5.6. Прадед Даши рожден в позапрошлом веке, а Аркаши – в прошлом, но их день рождения Даша и Аркаша празднуют одновременно. Известно, что оба прадеда однажды вместе отмечали день рождения, и возраст каждого был равен сумме цифр его же года рождения. На сколько лет позже родился Аркашин предок?

Ответ: 9.

Решение

Пусть предки Даши и Аркаши родились в $\overline{18xy}$ и $\overline{19ab}$ году соответственно. Во время встречи им было

$1 + 8 + x + y$ и $1 + 9 + a + b$ лет соответственно.

Определим двумя способами год, в котором произошла встреча. Поскольку возраст прадеда Даши тогда был равен сумме цифр его года рождения, встреча произошла в $1800 + 10x + y + 9 + x + y$ году.

Аналогично, возраст прадеда Аркаши равен сумме цифр его года рождения, и встреча произошла в $1900 + 10a + b + 10 + a + b$ году.

Итак,

$$1800 + 10x + y + 9 + x + y = 1900 + 10a + b + 10 + a + b.$$

После упрощений:

$$11(x-a)+2(y-b)=101.$$

Или:

$$11(x-a)+2(y-b-1)=99.$$

Отсюда: $y-b-1$ делится на 11.

Так как $-9 \le y-b \le 9,$ то $y-b=1.$

Следовательно, $x-a=9.$

Один старше другого на

$$1900+10a+b-1800-10x-y=100-10(x-a)-(y-b)$$
$$=100-90-1=9 \text{ лет.}$$

Разберем ещё два случая: старший мог родиться в 1900 году (который тоже относится к позапрошлому веку), или же младший – в 2000 году. В первом случае встреча произошла бы в 1910 году, значит, старший родился не раньше 1901 и не позже 1910 года, и ему по условию задачи в момент встречи не могло быть меньше 11 лет, противоречие.

Во втором случае встреча состоялась бы в 2002 году, и старшему на тот момент было бы не меньше 102 лет, чего также не может быть, так как сумма цифр любого целого числа от 1801 до 1900 не больше 27.

5.7. Аркаша хочет разделить разность двадцатых степеней 10 и 2 на число вида 2^n. Найдите наибольшее возможное значение n.

Ответ: 24.

Решение

$$10^{20}-2^{20}=2^{20}\cdot 5^{20}-2^{20}=2^{20}\cdot(5^{20}-1)$$

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ.

$$5^{20}-1=(5^{10}-1)(5^{10}+1)=(5^5-1)(5^5+1)(25^5+1)=$$
$$=(5-1)(5^4+5^3+5^2+5+1)(5+1)(5^4-5^3+5^2-5+1)(25+1)(25^4-25^3+25^2-25+1)=$$
$$=2^4\cdot(5^4+5^3+5^2+5+1)\cdot 3\cdot(5^4-5^3+5^2-5+1)\cdot 13\cdot(25^4-25^3+25^2-25+1).$$

Последние пять множителей – нечетные.

Второй способ.

$$5^{20} - 1 = (1 + 4)^{20} - 1 = 1 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot \frac{19}{2} \cdot 4^2 + \ldots + 4^{20} - 1$$
$$= 5 \cdot 24 + 10 \cdot 19 \cdot 24 + \ldots + 4^{20}.$$

В полученной сумме первое слагаемое делится только на 2^4, а каждое из остальных – хотя бы на 2^5. Значит, число $5^{20} - 1$ делится на 2^4, но не на 2^5.

5.8. Известно, что для некоторого числа a выполнено условие: если b – простое, a делится на (b-1), то a делится на b. Каково наименьшее возможное значение a?

Ответ: 1806

Решение

Пусть n удовлетворяет этому условию. Поскольку n делится на 1 = 2 – 1, оно должно делиться на 2, но тогда оно делится на 3 = 2 + 1, на 7 = 2·3 + 1 и на 43 = 2·3·7 + 1. Поэтому n должно делиться на 1806 = 2·3·7·43. Следовательно, минимальное n (если оно существует) не меньше 1806.

С другой стороны, для 1806 условие задачи выполнено. Вот все делители числа 1806: 1, 2, 3. 6, 7, 14, 21, 42, 43, 86, 129, 301, 1806. Увеличив теперь каждый из них на единицу, получим: 2, 3, 4. 7, 8, 15, 22, 43, 44, 87, 130, 302, 1807.

Остаётся отобрать все простые числа из второго набора и убедиться, что они входят в первый набор (1807 – не простое, оно делится на 13).

5.9. В коттеджном поселке несколько домов, в каждом доме – одинаковое число этажей, и на каждом этаже – одинаковое число комнат. При этом домов больше одного; комнат на этаже меньше числа этажей, но больше числа домов. Сколько в домах этажей, если всего в нем 165 квартир?

Ответ: 11

Решение

165 = 11·5·3.

Обозначим через d число домов, через e — число этажей в доме, а через k — число комнат на этаже. Тогда d·e·k = 165 = 11·5·3, причём числа 3, 5, 11 — простые. Учитывая, что 1 < d < k < e, получаем e = 11.

6. ТЕОРЕМА ВИЕТА	КЛАСС
	5 6 7 8

5-6-7-8 класс

6.1. Сумма чисел x, y, z равна 0, а сумма их квадратов равна 1.

Найдите $2x^4 + 2y^4 + 2z^4$.

Ответ: 1

Решение

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x + y + z)^4 + 4xyz(x + y + z) + 2(xy + yz + xz)^2 - 4(x + y + z)^2(xy + yz + xz).$$

В нашем случае:

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

6.2. В уравнении $x(x^2 + a) = 6(x^2 + 1))$ один из корней равен 3. Найдите остальные корни. В ответе запишите значение их суммы.

Ответ: 6

По теореме Виета сумма двух оставшихся корней равна 3, а их произведение равно 2. Отсюда ясно, что $x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

6.3. Найдите наименьшее возможное значение n в уравнении

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0,$$

если его четыре не обязательно различных корня положительны, а коэффициенты m, n, p, q принимают целые значения.

Ответ: 6.

Решение

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – корни уравнения (возможно, некоторые из них совпадают). По теореме Виета

$$n = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \qquad q = x_1x_2x_3x_4,$$

а значит, n и q положительны. Заметим, что

$$\frac{b}{\sqrt{d}} = \left(\sqrt{\frac{x_1x_2}{x_3x_4}} + \sqrt{\frac{x_3x_4}{x_1x_2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x_1x_3}{x_2x_4}} + \sqrt{\frac{x_2x_4}{x_1x_3}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x_1x_4}{x_2x_4}} + \sqrt{\frac{x_2x_3}{x_1x_4}}\right) \geq$$
$$\geq 2 + 2 + 2$$

(неравенство Коши). Поэтому $b \geq 6$ (d – целое, значит, $d \geq 1$). Равенство достигается в случае, когда уравнение имеет четыре кратных корня, равных 1. В этом случае многочлен имеет вид

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$