ВСЕРОССИЙСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЗАОЧНЫЙ ТУР

Что дает участие в конкурсе? Победители и призеры конкурса награждаются дипломами Российской ассоциации учителей математики и журнала «Математика», учебно-методической литературой по математике и правом опубликовать свою статью на страницах нашего журнала. Участники, не ставшие победителями или призерами, но показавшие достойные результаты, получат сертификаты участников.

Кроме того, победители и призеры конкурса, которые в *следующем* учебном году будут иметь учебную нагрузку не менее 9 часов в неделю, будут приглашены к участию в очном туре конкурса, о дате и месте проведения которого в 2018 году будет объявлено дополнительно.

Что нужно делать? Вам предлагается выполнить девять заданий, разбитых на три блока: математический (задания 1–5), методический (задания 6–8) и педагогический (задание 9).

Работы (не ксерокопированные и не сканированные), оформленные в бумажном виде, следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика», Б. Власьевский пер., д. 11, ком. 211, Москва, 119002 (с пометкой на конверте: «На конкурс»), работы, оформленные в электронном виде, следует направить на электронный адрес konkurs.uchiteley.matematiki@gmail.com (с темой: «На конкурс_ФИО»). Сразу после отправки работы вам необходимо заполнить заявку на участие, перейдя по ссылке https://goo.gl/forms/xq7ayb5okNmVjidh1. Внимание: в случае отсутствия у вас доступа в Интернет заявку надо прислать по почте вместе с работой, заполнив бланк (см. ниже). Вопросы по оформлению заявки принимаются по адресу proektmat@gmail.com.

Срок отправки работ — до 20 апреля 2018 года (по почтовому штемпелю либо по дате отправки электронного письма). Все вопросы по оформлению работ вы также можете направить на адрес konkurs.uchiteley.matematiki@gmail.com.

К участию допускаются и коллективные работы (в составе коллектива авторов — не более трех человек).

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

I. Математический блок

Решите задачи.

1. Рабочие изготовили детали двух видов: винтики и шпунтики. Каждый сделал 12 деталей, причем Вася сделал восьмую часть всех винтиков и 3 шпунтика — больше шпунтиков, чем любой другой рабочий. Сколько было рабочих?

2. Дан куб с ребром 3 см. Хулиган Вася выкрасил некоторые грани этого куба в красный цвет, а затем распилил куб на маленькие кубики с ребром 1 см. Могло ли при этом получиться ровно 7 кубиков, у которых не окрашена ни одна из граней?

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

3. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ найдутся такие нечетные числа x и y, что
$$7x^2 + y^2 = 2^n.$$

4. Докажите, что
$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-t) - xyzt \leq \frac{5}{16},$$
если сумма положительных чисел x, y, z и t равна 1.

5. На сторонах прямоугольного треугольника вне его построены квадраты. Эту известную с давних времен картинку иногда называют «пифагоровы штаны». Постройте (циркулем и линейкой) еще один квадрат так, чтобы он делил площадь каждого из трех квадратов «пифагоровых штанов» пополам.

II. Методический блок

В предложенных текстах (6–8) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. «Задача». В коробке было 16 конфет четырех видов — по четыре конфеты каждого вида. Их раздали восьмерым детям — по две конфеты каждому. Докажите, что какие-то двое детей получили либо четыре одинаковые конфеты, либо четыре попарно различные.

«Решение». Предположим, что это не так. Обозначим виды конфет цифрами 1, 2, 3, 4. Каждому ребенку могли достаться либо две одинаковые конфеты, либо две различные.

1) Две одинаковые конфеты. Если для какого-нибудь вида конфет таких детей двое, то им достались четыре одинаковые конфеты. Значит, всего таких детей не более четырех.

2) Две различные конфеты. Разобьем все возможные пары различных конфет на три пары, дополняющие друг друга до полного набора: {1–2; 3–4}, {1–3; 2–4}, {1–4; 2–3}. Если каким-то двум детям досталось по две конфеты, принадлежащих одной из таких пар, то они получили четыре попарно различные конфеты. Следовательно, таких детей не более трех.

Таким образом, всего могло быть не более семи детей, однако по условию их восемь. Противоречие.

7. «Задача». Найдите точки экстремума непрерывной функции $f(x)$, если $f''(x) = 2$ при всех $x < 0$ и $f'(x) = 1$ при всех $x \geq 0$.

«Ответ»: $x = -0{,}5$.

«Решение». Дважды интегрируя $f''(x)$ при $x < 0$, получим, что при таких x функция имеет вид
$$f(x) = x^2 + ax + b.$$
Интегрируя $f'(x) = 1$ при $x \geq 0$, получим, что при таких x функция имеет вид
$$f(x) = x + c.$$
Так как функция непрерывна, то
$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 + ax + b\right) = f(0) = c,$$
следовательно, $b = c$. Кроме того, $f'(0) = 1$, значит,
$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 + ax + b\right)' = \lim_{x\to 0}(2x + a) = 1.$$
Следовательно, $a = 1$.

Таким образом, функция имеет вид
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + c, x < 0, \\ x + c, x \geq 0. \end{cases}$$
У такой функции только одна точка экстремума: $x = -0{,}5$.

8. «Задача». В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противолежащие стороны попарно параллельны и
$$AC = BD = CE = DF = EA = FB.$$
Докажите, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

«Решение». Заметим, что четырехугольник $ABDE$ — равнобокая трапеция, так как, по условию, параллельны стороны AB и DE, равны стороны BD и AE. Равнобокая трапеция — вписанный четырехугольник, поэтому точки четверки точек (A, B, D, E) лежат на одной окружности. Аналогичный вывод можно сделать для четверок (B, C, E, F) и (C, D, F, A). Диагональ BE — общая хорда окружностей для четверок (A, B, D, E) и (B, C, E, F). Аналогично, диагональ CF — общая хорда окружностей второй и третьей четверок, диагональ AE — общая хорда окружностей третьей и первой четверок. По лемме о трех хордах (частный случай теоремы о радикальном центре трех окружностей), AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

III. Педагогический блок

9. Молодой учитель часто предлагает классу интересные задачи, посильные лишь немногим ученикам. К нему пришли обеспокоенные родители «средних» учеников. Их огорчает, что их дети на уроке попусту теряют время, потому что сами решить такие задачи не могут. Как результат, они хуже усваивают программный материал. Домашнее задание выполнить целиком многие также не могут, а последнее время уже и не пытаются. Дети теряют веру в свои силы и получают психологическую травму.

Назовите несколько возможных методических ошибок учителя и дайте ему как можно более конкретные советы о форме подачи трудных задач. Что ему, возможно, имеет смысл изменить в своей работе? А что лучше не менять, а спокойно объяснить родителям? Как построить работу так, чтобы и «Волки были [почти] сыты, и овцы [почти] целы»?